

TESIS DOCTORAL

Modelos de celda y del Continuo Generalizado para el análisis del comportamiento dinámico de sólidos estructurados

Autor:

Óscar Serrano González

Director/es:

José Fernández Sáez

Ramón Zaera Polo

Tutor:

Ramón Zaera Polo

DOCTORADO EN INGENIERÍA MECÁNICA Y ORGANIZACIÓN INDUSTRIAL

Leganés, noviembre 2018

Agradecimientos

En primer lugar me gustaría agradecer a mis directores de tesis, Pepe y Ramón, su dedicación y trabajo para llevar a cabo la realización de esta tesis. Gracias por estos tres años de grandes momentos discutiendo sobre *lattices* y ondas.

También me gustaría agradecer al Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras su confianza para iniciar mi carrera docente. A todos los compañeros del departamento, gracias por vuestra ayuda a lo largo de estos tres años.

Esta tesis doctoral ha sido realizada gracias al apoyo económico del Ministerio de Economía y Competitividad de España (Nº de proyecto DPI2014-57989-P).

Mi formación como investigador no hubiera sido la misma sin la estancia durante tres meses en el Instituto Tecnológico de Georgia (Atlanta, EE.UU.). Me gustaría agradecer al Profesor Massimo Ruzzene, director del Departamento de Vibraciones y Propagación de ondas, por acogerme durante mi estancia y la colaboración posterior con el grupo de investigación. Gracias también a Javier por su ayuda tanto fuera como dentro del departamento durante mi estancia en Atlanta.

Por supuesto, quiero dedicar esta tesis a mis padres y familia por su apoyo invaluable. Gracias por la educación y valores que me aportasteis para llegar hasta aquí.

Finalmente, quiero dedicar especialmente esta tesis a Raquel. Tu apoyo y comprensión en estos tres años y, sobre todo, durante la fase final hace que esta tesis sea también un poco tuya. Eres mi torre en séptima, mi peón pasado y mi pareja de alfiles y espero que con esta tesis haberte contestado a qué llevo haciendo durante tres años.

Resumen

La presente tesis doctoral está centrada en el análisis del comportamiento dinámico de sólidos estructurados elásticos mediante modelos de celda y modelos del Continuo Generalizado. El denominador común de la formulación de estos dos modelos es la consideración de efectos de escala.

En la primera parte de la tesis se analiza, mediante un modelo de celda, el comportamiento dinámico de un sólido estructurado (*lattice*) compuesto por una placa de Kirchhoff sobre la que se sitúa perpendicularmente una distribución periódica de vigas de Euler-Bernoulli. Se consideran tres configuraciones: cuadrada, triangular y hexagonal. Se identifican las correspondientes celdas unitarias irreducibles y se resuelve el problema de la propagación de ondas mediante un modelo de Elementos Finitos desarrollado al efecto. Con ayuda del teorema de Bloch se obtienen las relaciones de dispersión y, a partir de ellas, las velocidades de fase y de grupo. Este análisis de propagación de ondas revela la capacidad del sistema de atenuar, orientar en direcciones preferentes, o incluso eliminar la propagación de ondas con determinadas características. Este comportamiento es debido a la estructura interna del sólido (vigas situadas sobre la placa siguiendo un determinado patrón) y no se puede reproducir si se analiza considerando una distribución densa de vigas. Para analizar las variables que afectan al comportamiento del sistema, se ha llevado a cabo un análisis dimensional que ha permitido identificar los tres grupos de parámetros de los que depende la respuesta del sólido estructurado. El conocimiento de estos grupos adimensionales contribuye a un diseño adecuado de *lattice* para satisfacer los requerimientos que se pretendan cumplir en una cierta aplicación.

En la segunda parte de la tesis se analiza, mediante un modelo axiomático del Continuo Generalizado (gradiente de inercia), el comportamiento dinámico de un cable estructurado sometido a vibraciones no lineales. Se parte de un modelo discreto del cable, considerado como referencia, en el que se aprecian claramente los efectos de escala. Con el objetivo de recoger estos efectos de escala mediante modelos continuos se realiza una continuación no estándar de las ecuaciones de gobierno del sistema discreto e, independientemente, se desarrolla un modelo de gradiente de inercia específico para este problema, resultando ambos formalmente idénticos. Esto permite identificar los parámetros del modelo de gradiente de inercia a partir de propiedades

del sistema discreto. Finalmente, se muestra la notable concordancia de los resultados del modelo continuo propuesto con los del discreto de referencia. Esta concordancia revela que el modelo propuesto es notablemente superior al continuo clásico para tratar este tipo de problemas donde están presentes los efectos de escala. Además, el modelo continuo supone un gran ahorro computacional frente al discreto.

Abstract

This doctoral thesis is focused on the analysis of the dynamic behaviour of elastic structured solids using unit cell models and generalized continuum models. The nexus between these models is the consideration of lengths scale effects.

The first part of the thesis is devoted to the analysis of the dynamic behavior of a structured solid (lattice) comprised of a periodic array of Euler-Bernoulli beams joined perpendicularly to a Kirchhoff plate. Three arrangements are considered: square, triangular and hexagonal. The corresponding irreducible unit cells are identified, and the wave propagation problem is solved using a Finite Element Model. The dispersion relations, as well as the phase and group velocities are obtained with the aid of the Bloch theorem. This analysis reveals the capacity of the system to attenuate, guide in preferred directions, or even cancel the propagation of waves with specific characteristics. This behavior is due to the internal structure of the solid (beams joined to the plate following a periodic arrangement). In order to analyze the features affecting the system, three groups of parameters driving its dynamic behavior have been identified using nondimensional analysis. The knowledge of these groups contributes to a suitable design of the lattice satisfying the requests to be satisfied for a given application.

The second part is devoted to the analysis of the nonlinear vibration of a structured cable, using a generalized continuum model (inertia gradient). The study starts from the proposal of a discrete model, taken as the reference, which shows the scale effects under study. In order to capture these effects through continuum models, a non standard continualization of the governing equations of the discrete system is developed and, independently, the inertia gradient theory is specialized to the structured cable typology, both models resulting formally identical. This permits the identification of the parameters of the inertia gradient model from the properties of the discrete system. Finally, the agreement between the results of the proposed continuum model and of the reference discrete is highlighted. This agreement demonstrates the superiority of the generalized continuum, as compared to the classical one, to address scale effects in dynamic problems. Moreover, the continuum model results in a remarkable reduction of computational time, as compared to discrete models.

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	III
Abstract	V
1. Introducción, motivación y objetivos	1
1.1. Introducción general	1
1.2. Problemas estudiados. Motivación	9
1.2.1. Sólido periódico placa-viga. Modelo de celda	9
1.2.2. Cable tenso estructurado. Modelo del Continuo Generalizado	11
1.3. Objetivos	12
1.4. Contenidos	13
1.5. Contribuciones originales	14
2. Introducción a la propagación de ondas en sólidos estructurados	17
2.1. Definición de sólido estructurado	18
2.2. Propagación de ondas en estructuras <i>lattice</i>	21
2.2.1. Relación de dispersión	23
2.2.2. Teorema de Bloch	30
2.3. Análisis de propagación de ondas en sólidos estructurados unidimensionales mediante modelos de celda	35
2.3.1. <i>Lattice</i> monoatómico 1D	35
2.3.2. <i>Lattice</i> diatómico 1D	43
2.3.3. <i>Lattice</i> monoatómico 1D con resonadores internos	46
3. Análisis de la propagación de ondas en estructuras <i>lattice</i> placa-viga	51
3.1. Formulación del problema	52

3.2.	Forma adimensional de la ecuación de gobierno: Grupos adimensionales	57
3.3.	Análisis numérico	59
3.4.	Análisis de resultados	61
3.4.1.	Relaciones de dispersión	61
3.4.2.	Velocidades de fase y de grupo	78
3.5.	Influencia de los grupos adimensionales en la estructura de bandas	82
3.6.	Observaciones	88
3.7.	Análisis de propagación de ondas en estructuras <i>lattice</i> viga-viga	90
3.7.1.	Formulación del problema	90
3.7.2.	Análisis numérico	91
3.7.3.	Análisis de resultados	93
3.8.	Conclusiones	99
4.	Introducción a los modelos del Continuo Generalizado	103
4.1.	Breves ideas sobre modelos del Continuo Generalizado	104
4.2.	Modelo continuo mixto local/no local de Eringen	106
4.2.1.	Consideraciones generales	106
4.2.2.	Aplicación a nanoestructuras unidimensionales	107
4.3.	Modelo continuo de gradiente de deformación	110
4.3.1.	Consideraciones generales	110
4.3.2.	Aplicación a nanoestructuras unidimensionales	112
4.4.	Modelo continuo de gradiente de inercia	114
4.4.1.	Consideraciones generales	114
4.4.2.	Aplicación a nanoestructuras unidimensionales	117
5.	Análisis de vibraciones no lineales en cables tensos estructurados	119
5.1.	Formulación del problema discreto	121
5.2.	Continualización no estándar del problema discreto	125
5.3.	Modelo continuo axiomático	127
5.3.1.	Simplificación del modelo para cables de rigidez elevada	129
5.4.	Comparación de los modelos linealizados	130
5.5.	Solución de las ecuaciones de gobierno no lineales	133
5.5.1.	Modelo discreto	134
5.5.2.	Modelo axiomático	135
5.6.	Análisis de los resultados	141

5.6.1. Análisis del desplazamiento transversal	145
5.6.2. Análisis del desplazamiento axial	152
5.7. Conclusiones	155
6. Conclusiones generales y trabajos futuros	157
6.1. Conclusiones generales	157
6.2. Trabajos futuros	159
6.3. Difusión de resultados	159
7. General conclusions and future work	161
7.1. General conclusions	161
7.2. Future work	163
7.3. Dissemination of results	163
Apéndices	165
Apéndice A: Obtención de la Primera Zona de Brillouin en una estructura <i>lattice</i> bidimensional	167
Apéndice B: Ecuación de gobierno de las vibraciones libres de la estructura <i>lattice</i> placa-viga	171
Apéndice C: Matrices de masa y de rigidez del elemento MZC . . .	175
Apéndice D: Matrices de masa y rigidez del elemento CKZ	177
Apéndice E: Solución de la ecuación de Duffing mediante el método perturbativo de Múltiples Escalas	181
Bibliografía	185

Índice de figuras

1.1.	<i>Órgano</i> , del escultor Eusebio Sempere.	4
1.2.	Imágenes, a distintas escalas, de metamaterial constituido por una chapa de acero con resonadores quirales, con efecto de refracción negativa [1]	5
1.3.	Estructura interna de un sólido bidimensional.	6
1.4.	Imágenes SEM un nanolaser ultravioleta [2].	9
1.5.	Substrato con distribución periódica de vigas cortas con sección transversal circular: (a) estructura <i>lattice</i> (b) modelo de celda.	10
2.1.	Ejemplo de estructura <i>lattice</i> y de celda unitaria.	18
2.2.	Ejemplo de <i>lattice</i> bidimensional con celda unitaria rectangular.	19
2.3.	Diferencia entre celda unitaria y celda unitaria irreducible.	20
2.4.	Celdas unitarias irreducibles de dimensiones características a y b	21
2.5.	Onda armónica plana para un medio unidimensional.	22
2.6.	Propagación de la luz blanca a través de un medio dispersivo.	23
2.7.	Ejemplo de relación de dispersión para un sólido bidimensional.	24
2.8.	Comparación entre un sólido (a) no dispersivo, y otro (b) dispersivo.	26
2.9.	Representación de las superficies de dispersión, representadas en la figura 2.7, mediante líneas de iso-frecuencia: (a) primera superficie, (b) segunda superficie.	27
2.10.	<i>Band gap</i> y <i>stop band</i> para la relación de dispersión representada en las figuras 2.7 y 2.9.	29
2.11.	Celda unitaria con nodos característicos: interiores (Q_I), en los contornos (Q_R, Q_T, Q_L, Q_B) y en los vértices ($Q_{RT}, Q_{LT}, Q_{LB}, Q_{RB}$)	31
2.12.	Cadena monoatómica con celda unitaria.	36

2.13. Relación de dispersión de la cadena monoatómica.	38
2.14. Velocidades de (a) fase y de (b) grupo.	39
2.15. Relación de dispersión a partir del método (a) inverso y (b) directo.	41
2.16. Esquema de cadena finita de 100 partículas.	41
2.17. Deformada de la cadena para (a) $\Omega = 1.99$, (b) $\Omega = 2.001$, (c) $\Omega = 2.01$, (d) $\Omega = 2.1$	42
2.18. Cadena diatómica con celda unitaria.	43
2.19. Relación de dispersión a partir del método (a) inverso y (b) directo.	46
2.20. Cadena monoatómica con resonador interno y celda unitaria. .	47
2.21. Relación de dispersión a partir del método (a) inverso y (b) directo.	50
3.1. Configuración cuadrada: (a) Vista isométrica, (b) Vista en planta con celda unitaria primitiva sombreada.	53
3.2. Configuración triangular: (a) Vista isométrica, (b) Vista en planta con celda unitaria primitiva sombreada.	53
3.3. Configuración hexagonal: (a) Vista isométrica, (b) Vista en planta con celda unitaria primitiva sombreada.	54
3.4. Primera Zona de Brillouin y zona irreducible en el espacio k_1 - k_2 : (a) Configuración cuadrada, (b) Configuración triangular y hexagonal.	55
3.5. Esquema de la celda unitaria para la configuración cuadrada con los grados de libertad considerados.	56
3.6. Celda unitaria con identificación de tipos de nodos en la placa: (a) Configuración cuadrada, (b) Configuración triangular y hexagonal.	60
3.7. Configuración cuadrada: Superficie de dispersión del modo 1 en diagrama de iso-frecuencias, PZB y zona irreducible. . . .	63
3.8. Configuración cuadrada: (a) Curvas de dispersión y estructura de bandas: modos 1 a 5, (b) Detalle de curvas de dispersión y estructura de bandas: modos 1 y 2.	64
3.9. Configuración triangular: Superficie de dispersión del modo 1 en diagrama de iso-frecuencias, PZB y zona irreducible. . . .	69
3.10. Configuración triangular: (a) Curvas de dispersión y estructura de bandas: modos 1 a 5, (b) Detalle de curvas de dispersión y estructura de bandas: modos 1 y 2.	71

3.11. Configuración Hexagonal: Superficie de dispersión del modo 1 en diagrama de iso-frecuencias, PZB y zona irreducible.	74
3.12. Configuración hexagonal: (a) Curvas de dispersión y estructura de bandas: modos 1 a 10, (b) Detalle de curvas de dispersión y estructura de bandas: modos 1 a 4.	75
3.13. Configuración cuadrada: (a) Velocidad de fase, (b) Velocidad de grupo del primer modo para varias frecuencias: ‘●’ $\omega = 0.65\omega_{\max}$, ‘●’ $\omega = 0.75\omega_{\max}$, ‘●’ $\omega = 0.88\omega_{\max}$, ‘●’ $\omega = 0.99\omega_{\max}$	80
3.14. Configuración triangular: (a) Velocidad de fase, (b) Velocidad de grupo del primer modo para varias frecuencias: ‘●’ $\omega = 0.65\omega_{\max}$, ‘●’ $\omega = 0.75\omega_{\max}$, ‘●’ $\omega = 0.85\omega_{\max}$, ‘●’ $\omega = 0.95\omega_{\max}$	81
3.15. Configuración hexagonal: (a) Velocidad de fase, (b) Velocidad de grupo del primer modo para varias frecuencias: ‘●’ $\omega = 0.65\omega_{\max}$, ‘●’ $\omega = 0.75\omega_{\max}$, ‘●’ $\omega = 0.85\omega_{\max}$, ‘●’ $\omega = 0.95\omega_{\max}$	81
3.16. Configuración cuadrada: Influencia de los grupos adimensionales en el valor medio y anchura del primer <i>band gap</i>	85
3.17. Configuración triangular: Influencia de los grupos adimensionales en el valor medio y anchura del primer <i>band gap</i>	86
3.18. Configuración hexagonal: Influencia de los grupos adimensionales en el valor medio y anchura del primer <i>band gap</i>	87
3.19. Curva de dispersión de una placa de Kirchhoff y primer modo de la estructura <i>lattice</i> con configuración cuadrada para diferentes valores de l	88
3.20. Estructura <i>lattice</i> : (a) Modelo, (b) Celda unitaria i con grados de libertad del contorno (izquierda l y derecha r) y puntos interiores I , y el vector base del <i>lattice</i> \mathbf{e}	91
3.21. (a) Curvas de dispersión (líneas sólidas) y <i>band gap</i> (zona gris) para $D_V = 0.15$ m, $D_H = 0.1$ m y $L = 1.0$ m y frecuencias naturales de vigas empotrada-libre (E–L) y empotrada-apoyada (E–A), (b) Forma del modo 3 en $\bar{\kappa} = 0$, (c) Forma del modo 5 en $\bar{\kappa} = \pi$	95
3.22. Evolución de los <i>band gaps</i> con D_V , $D_H = 0.1$ m y $L = 1.0$ m junto con las frecuencias naturales del resonador y del substrato.	97
3.23. Evolución de los <i>band gaps</i> con D_V , $D_H = 0.05$ m y $L = 1.0$ m junto con las primeras frecuencias naturales del resonador y del substrato.	98

5.1.	Representación del modelo discreto en la configuración de referencia y de dos partículas de la configuración deformada. . .	122
5.2.	Modelos linealizados (axial y transversal): (a) Curvas de dispersión, (b) Diferencia en frecuencia entre los modelos continuos y discreto.	132
5.3.	Solución analítica (línea) y perturbativa (\circ) del modelo continuo axiomático. Influencia del parámetro h : (a) Función temporal q versus tiempo adimensional τ , (b) Frecuencia adimensional $\bar{\omega}$ versus parámetro h	139
5.4.	Modelo discreto. Esquema con problemas equivalentes y desplazamientos transversales iniciales: (a) $N = 23$, (b) $N = 11$, (c) $N = 5$ y (d) $N = 3$. En negro, la partícula central y en gris, la partícula contigua de la derecha.	144
5.5.	Modelos discreto y continuos. Desplazamiento transversal adimensional de la partícula central en el modelo discreto y $\bar{w}(1/2, \tau)$ en los modelos continuos para $N = 23$, $\bar{\kappa} = \pi/8$, $h = 0.012$ (axiom.) y: (a) $q_0 = 0.05$, (b) $q_0 = 0.5$, (c) $q_0 = 1$, (d) $q_0 = 1.5$, (e) $q_0 = 2$ y (f) $q_0 = 2.5$	146
5.6.	Modelos discreto y continuos. Desplazamiento transversal adimensional de la partícula central en el modelo discreto y $\bar{w}(1/2, \tau)$ en los modelos continuos para $N = 11$, $\bar{\kappa} = \pi/4$, $h = 0.024$ (axiom.) y: (a) $q_0 = 0.05$, (b) $q_0 = 0.5$, (c) $q_0 = 1$, (d) $q_0 = 1.5$, (e) $q_0 = 2$ y (f) $q_0 = 2.5$	147
5.7.	Modelos discreto y continuos. Desplazamiento transversal adimensional de la partícula central en el modelo discreto y $\bar{w}(1/2, \tau)$ en los modelos continuos para $N = 5$, $\bar{\kappa} = \pi/2$, $h = 0.048$ (axiom.) y: (a) $q_0 = 0.05$, (b) $q_0 = 0.5$, (c) $q_0 = 1$, (d) $q_0 = 1.5$, (e) $q_0 = 2$ y (f) $q_0 = 2.5$	148
5.8.	Modelos discreto y continuos. Desplazamiento transversal adimensional de la partícula central en el modelo discreto y $\bar{w}(1/2, \tau)$ en los modelos continuos para $N = 3$, $\bar{\kappa} = 3\pi/4$, $h = 0.072$ (axiom.) y: (a) $q_0 = 0.05$, (b) $q_0 = 0.5$, (c) $q_0 = 1$, (d) $q_0 = 1.5$, (e) $q_0 = 2$ y (f) $q_0 = 2.5$	149
5.9.	Modelos discreto y continuos. Frecuencias adimensionales para: (a) $\bar{\kappa} = \pi/8$ y $N = 23$, (b) $\bar{\kappa} = \pi/4$ y $N = 11$, (c) $\bar{\kappa} = \pi/2$ y $N = 5$, y (d) $\bar{\kappa} = 3\pi/4$ y $N = 3$	151

5.10. Modelos discreto y continuos. Desplazamiento axial adimensional de la partícula a la derecha de la central en el modelo discreto y $\bar{u}(1/2 + 1/(N + 1), \tau)$ en los modelos continuos para $q_0 = 1$ y: (a) $\bar{\kappa} = \pi/8$ y $N = 23$, (b) $\bar{\kappa} = \pi/4$ y $N = 11$, y (c) $\bar{\kappa} = 3\pi/4$ y $N = 3$	153
5.11. Modelo discreto. Aceleración transversal y axial de la partícula a la derecha de la central en el modelo discreto para: (a) $\bar{\kappa} = \pi/8$ y $N = 23$, (b) $\bar{\kappa} = \pi/4$ y $N = 11$, y (c) $\bar{\kappa} = 3\pi/4$ y $N = 3$	154
7.1. (a) <i>Lattice</i> directo bidimensional; (b) PZB puntos X, M, N ; (c) PZB para $a = 1$ y $\theta = 90^\circ, 75^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$ y 15°	169
7.2. Elemento MZC con identificación de nodos.	175
7.3. Elemento CKZ con identificación de nodos.	177

Índice de tablas

1.1. Propagación de onda con frecuencia fuera y dentro del <i>band gap</i> para diferentes instantes de tiempo $t_3 > t_2 > t_1$	6
3.1. Vectores base del <i>lattice</i> (\mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2) y sus recíprocos correspondientes (\mathbf{b}_1 y \mathbf{b}_2) en términos de la dimensión característica a para las configuraciones estudiadas.	54
3.2. Propiedades mecánicas y geométricas de la estructura <i>lattice</i> placa-viga.	62
3.3. Configuración cuadrada: Representación de las formas de los modos 1 a 5 para los vértices de la zona irreducible.	65
3.4. Configuración cuadrada: Frecuencias adimensionales para el problema Tipo 1 para los vértices de la zona irreducible. . . .	67
3.5. Configuración cuadrada: Frecuencias adimensionales para el problema Tipo 2 para los vértices de la zona irreducible. . . .	67
3.6. Configuración cuadrada: Frecuencias adimensionales para el problema completo para los vértices de la zona irreducible. . .	68
3.7. Configuración cuadrada: Resumen del problema tipo presente en los modos 1 a 5 para los vértices de la zona irreducible. . .	68
3.8. Configuración triangular: Formas de los modos 1 a 5 para los vértices de la zona irreducible.	72
3.9. Configuración triangular: Resumen del problema tipo presente en los modos 1 a 5 para los vértices de la zona irreducible. . .	73
3.10. Configuración hexagonal: Formas de los modos 1 a 5 para los vértices de la zona irreducible para los vértices de la zona irreducible.	76
3.11. Configuración hexagonal: Formas de los modos 6 a 10 para los vértices de la zona irreducible para los vértices de la zona irreducible.	77

3.12. Configuración hexagonal: Resumen del problema tipo presente en los modos 1 a 10 para los vértices de la zona irreducible. . .	78
3.13. Propiedades mecánicas y geométricas de la estructura <i>lattice</i> viga-viga.	93

Capítulo 1

Introducción, motivación y objetivos

1.1. Introducción general

Durante las dos últimas décadas, el estudio de la propagación de ondas elásticas en sólidos estructurados ha recibido una notable atención debido a las novedosas y singulares propiedades y efectos encontrados, así como por su potencial para aplicaciones tecnológicas [3, 4]. El estudio de los fenómenos ondulatorios en sólidos, un campo cuyos inicios se remontan a varios siglos atrás, está experimentando actualmente un importante avance, impulsado tanto por desarrollos teóricos como experimentales, gracias a la posibilidad de fabricar sólidos que exhiben destacadas capacidades para la manipulación de ondas, más allá de las mostradas por los materiales convencionales [5]. Habitualmente, estas funcionalidades avanzadas se consiguen mediante la utilización de sólidos con estructura periódica, también conocidas como estructuras *lattice* por analogía con las estructuras cristalinas periódicas así denominadas en el ámbito de la Física del Estado Sólido; de hecho, buena parte de los conceptos y metodologías empleadas recientemente para el estudio de fenómenos ondulatorios en sólidos estructurados provienen de esta rama del conocimiento [6]. Un sólido estructurado o estructura *lattice* es un sistema que presenta una determinada periodicidad espacial, que puede ser debida a la ordenación de materiales, geometrías internas o incluso condiciones de contorno. Pueden encontrarse en diversas aplicaciones, cubriendo un amplio rango de escalas: desde láminas de grafeno y nanotubos de carbono

hasta elementos estructurales en ingeniería civil, pasando por sistemas microelectromecánicos empleados como filtros vibratorios, implantes biomédicos o materiales compuestos, por citar algunos ejemplos.

El interés de las estructuras *lattice* se remonta al año 1686 con los intentos de Newton por describir la propagación del sonido en el aire. Newton considera que el sonido se propaga por el aire de la misma forma que una onda elástica se propaga a lo largo de una cadena de partículas de masa idéntica, espaciadas periódicamente y unidas mediante muelles. Cerca de dos siglos más tarde, Cauchy se interesa por la propagación de ondas en el modelo de cadena monoatómica propuesto por Newton, mostrando que las ondas cuya longitud es mucho mayor que la distancia entre partículas se propagan a velocidades que son independientes de esta longitud. Sin embargo, la velocidad de propagación depende de la longitud de onda cuando esta última es próxima a dicha distancia. Más adelante, en 1881, Lord Kelvin modifica el modelo estudiado por Newton y Cauchy, añadiendo a cada partícula una masa unida a esta mediante un muelle. Kelvin descubre que, excitando la cadena en un rango de frecuencias determinado, la onda no se propaga. Estos rangos de frecuencia se denominan *band gaps* y son uno de los efectos más relevantes, y de mayor interés aplicado, presentes en estructuras *lattice*. Otra configuración en la que se evidencia la existencia de estos *band gaps* es la cadena diatómica, analizada en primer lugar por Born [7] en 1912, en la que se alternan dos partículas de diferente masa. Posteriormente, en 1946, Brillouin publica uno de los textos considerados como fundamentales sobre los fenómenos de propagación de ondas en estructuras *lattice* [8].

A principios de la segunda mitad del siglo XX, la necesidad de identificar defectos en materiales compuestos mediante técnicas no destructivas motivó de nuevo el estudio de la propagación de ondas en medios periódicos. Entre las primeras publicaciones sobre esta temática destaca el trabajo de Rytov [9] para el análisis de la propagación de ondas en un sólido periódico unidimensional compuesto por varios materiales. Posteriormente se han desarrollado modelos para el análisis de propagación de ondas en materiales laminados periódicos [10, 11, 12].

Desde finales de los años 90 se investiga en sistemas periódicos denominados *cristales fonónicos* [13, 14, 15], término derivado del equivalente en el ámbito de la propagación de ondas electromagnéticas en medios periódicos.

cos (cristal fotónico), así como los denominados *metamateriales* elásticos y acústicos [16]. Un cristal fonónico es un material compuesto por uno o más estados de la materia (sólido, líquido/gas) distribuidos periódicamente. Sirva como ejemplo de cristal fonónico la obra artística *Órgano* realizada en 1977 por el escultor Eusebio Sempere (Fig. 1.1), formada por una distribución periódica de tubos de acero, unidos a una placa circular y separados entre ellos una determinada distancia. La estructura fue analizada por Martínez-Sala [17] mostrando un *band gap* para un valor de frecuencia de 1.6 kHz. Como se puede observar en la figura 1.1, este cristal fonónico está compuesto por una fase sólida metálica embebida en una fase gaseosa (aire). La atenuación de la onda acústica no es debida a su disipación en el acero, sino a las interferencias destructivas producidas por la distribución de tubos. Trabajos posteriores de otros autores han puesto de manifiesto la capacidad de los cristales fonónicos para atenuar y cancelar la propagación de ondas. Kushwaha et al. [13, 14] analizan la propagación de ondas en un sólido compuesto por una distribución periódica de cilindros de níquel embebidos en una matriz de aluminio. Vasseur et al. [15] realiza el mismo estudio para el caso de cilindros de carbono embebidos en una matriz de resina epoxi. Ambos cristales muestran su capacidad para cancelar la propagación del sonido para un rango de frecuencias determinado (*band gaps*). Las aplicaciones más comunes de los cristales fonónicos están relacionadas con el control, atenuación y aislamiento de vibraciones y ruido. Sin embargo, existen otras muy interesantes como la de bloquear la propagación de ondas en un sentido, estando permitida en el sentido opuesto. Esta capacidad, característica de los diodos en el ámbito de la electrónica, se encuentra también en el campo de la mecánica gracias a las propiedades singulares mostradas por los sólidos periódicos.



Figura 1.1: *Órgano*, del escultor Eusebio Sempere.

En los cristales fonónicos, los *band gaps* se crean habitualmente debido al mecanismo *Bragg scattering* por el que se generan interferencias destructivas cuando la perturbación mecánica presenta una longitud de onda próxima a la distancia entre los elementos de la fase más rígida del cristal. Por contra, los metamateriales elásticos y acústicos están basados en la inclusión de resonadores dentro del sustrato por el que se propaga la onda [16]. El acoplamiento entre las frecuencias naturales del resonador y las del sustrato permite que aparezcan *band gaps* a frecuencias mucho más bajas que las correspondientes a los mecanismos de *Bragg scattering* [18], dando lugar a propiedades efectivas (densidad, módulo de compresibilidad) negativas, o índices de refracción negativos (Fig. 1.2), por lo que amplía notablemente las posibles aplicaciones.

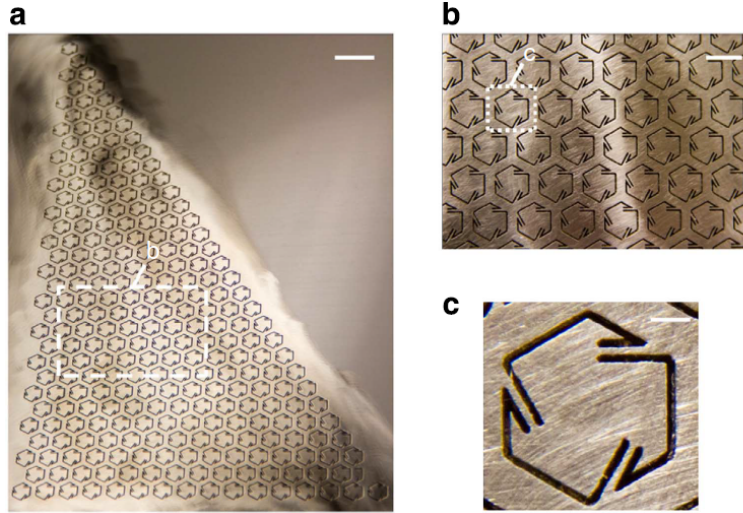


Figura 1.2: Imágenes, a distintas escalas, de metamaterial constituido por una chapa de acero con resonadores quirales, con efecto de refracción negativa [1]

Los anteriores fenómenos, todos ellos de notable interés para el control de ondas en sólidos, están esencialmente ligados a los efectos de escala. El control de la perturbación elástica es posible cuando su longitud de onda es del orden de la estructura subyacente, emergiendo los fenómenos de aislamiento o direccionalidad, entre otros. La tabla 1.1 muestra diferentes instantes de la propagación de una onda en un sólido constituido por masas y muelles lineales, formando una red hexagonal bidimensional (Fig. 1.3), y sometido a una excitación armónica puntual. Para frecuencias de excitación bajas (longitudes de onda larga), la propagación es isótropa. A medida que la frecuencia de excitación aumenta (por tanto disminuye la longitud de onda, aproximándose a la distancia característica del lattice), la perturbación comienza a propagarse según direcciones preferentes, y finalmente se alcanza su atenuación completa (*band gap*). Así pues, resulta esencial considerar la estructura interna del sólido en los modelos empleados para análisis y diseño de estos sistemas.

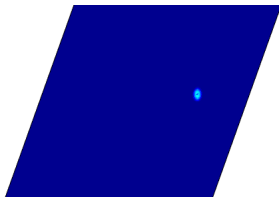
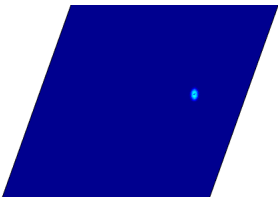
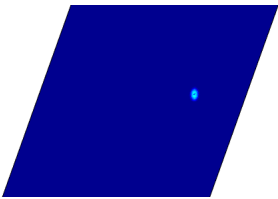
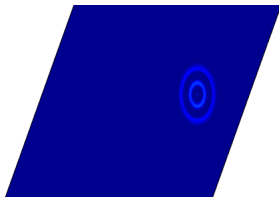
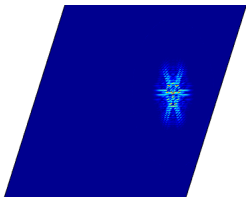
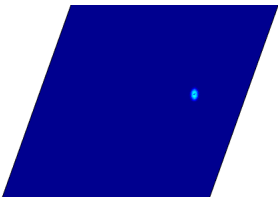
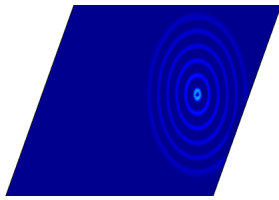
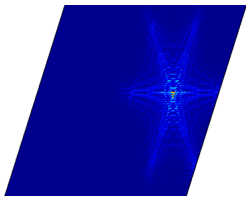
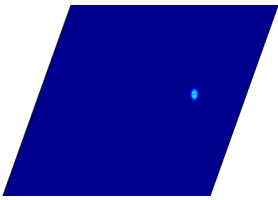
	Fuera del <i>band gap</i>	Fuera del <i>band gap</i>	Dentro del <i>band gap</i>
t_1			
t_2			
t_3			

Tabla 1.1: Propagación de onda con frecuencia fuera y dentro del *band gap* para diferentes instantes de tiempo $t_3 > t_2 > t_1$.

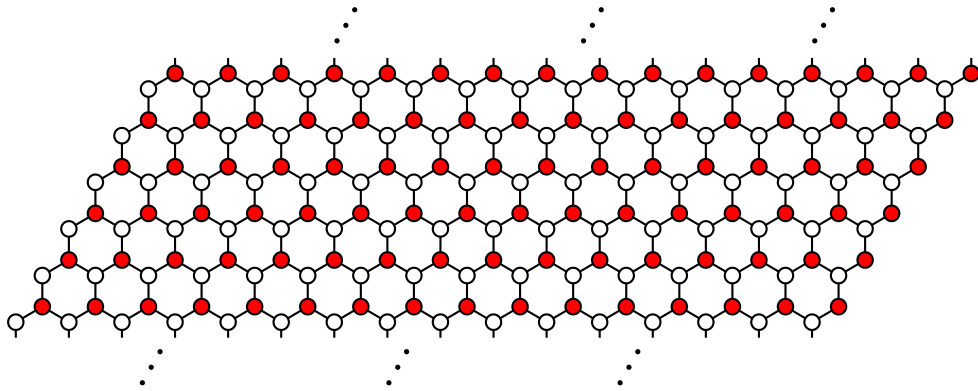


Figura 1.3: Estructura interna de un sólido bidimensional.

Teniendo en cuenta que la dimensión característica de este tipo de sistemas suele ser varios órdenes de magnitud mayor que la de su estructura inherente, el coste computacional para la resolución de los modelos puede resultar prohibitivo, si se pretende que éstos recojan el detalle a la escala a la que tienen lugar los fenómenos de interés. Por ello se han desarrollado en las últimas décadas técnicas específicas que permiten extraer las propiedades ondulatorias del sistema, o modelar dominios mucho mayores que el subdominio que define, por repetición, el sólido periódico, todo ello con un coste de cálculo notablemente inferior. Algunas de ellas, como los modelos de celda y la aplicación a estos del teorema de Bloch (que se presentarán en el próximo capítulo), provienen de la Física del Estado Sólido, disciplina en la que se han desarrollado metodologías para el estudio de sistemas cristalinos y, por tanto, periódicos.

Desde el ámbito de la Mecánica del Medio Continuo han surgido en las últimas décadas nuevas teorías que permiten recoger los efectos de escala. Ciertamente, la posibilidad de tratar el sólido como un continuo está condicionada por la relación entre su dimensión –o de la longitud de onda de la sollicitación– y la de la estructura subyacente. Si estas relaciones no son suficientemente grandes, las hipótesis de la Mecánica del Medio Continuo Clásico (MMCC) pierden validez dado que no se consideran longitudes de escala en su formulación. En este sentido, la Mecánica del Medio Continuo Generalizado (MMCG) ha despertado en los últimos años un notable interés. La MMCG relaja ciertos axiomas MMCC e introduce nuevas variables y parámetros, tratando de recoger los efectos de heterogeneidad microestructural y de escala antes mencionados. Tiene sus orígenes a finales del siglo XIX y principios del XX, experimentando un renacimiento en los años 60. Durante la última década ha emergido con gran fuerza gracias al desarrollo de la nanotecnología y de nuevos materiales con microestructura compleja, y a un mejor conocimiento de los efectos de escala. Cuando se aplican a sólidos elásticos, las teorías más extendidas del continuo generalizado son la de Eringen [19, 20] o no local, y la de Mindlin [21] o de gradiente.

Las anteriores teorías de la MMCG se formulan de forma axiomática con lo que, si bien pueden recoger adecuadamente el efecto de escala inherente a la estructura del sólido, los parámetros adicionales de material ligados a estos efectos deben calibrarse por comparación con resultados experimentales. Así, diversos autores se han planteado llegar a estas mismas formu-

laciones partiendo del modelo completo del *lattice* y aplicando técnicas de continualización. Uno de los aspectos sobresalientes de estas técnicas es que los parámetros del modelo continuo generalizado se derivan directamente de las características que definen la microestructura específica del discreto del que provienen, tales como propiedades elásticas de los elementos que constituyen la celda y parámetros geométricos que definan la tipología de esta, lo que evita la tarea de calibración inherente a los modelos formulados de forma axiomática. Existen diversas técnicas para continualizar el sistema discreto. Las convencionales consisten en aproximar las variables mediante desarrollos espaciales, truncando los términos de alto orden. El desarrollo hasta los términos de segundo orden da lugar, en ciertos problemas uni- y bidimensionales, a las ecuaciones de la MMCC [22] que, como se ha señalado, no recogen adecuadamente los efectos de escala. Considerando términos de orden superior, Polyzos y Fotiadis [23] recuperan las ecuaciones de los modelos de primer y segundo gradiente de Mindlin [24, 21], una de las teorías de la MMCG más extendidas, para un medio unidimensional. Otros autores han empleado técnicas de continualización no convencional, considerando los desarrollos en serie de Taylor como operadores pseudo-diferenciales para tratarlos después mediante aproximantes de Padé de uno o dos puntos y de distintos grados [25, 26]. Estas técnicas no están suficientemente desarrolladas, en especial para problemas en los que se consideran grandes deformaciones, en los que las posibilidades de control de vibraciones y de propagación de ondas se amplían aún más por las singulares propiedades que muestran los sistemas *lattice* en el rango no lineal [27]. En esta temática cabe destacar los trabajos de Vila et al. [28, 29] en los que se desarrollan modelos para el análisis de vibraciones no lineales, axiales y en flexión, de vigas con efecto de escala.

La presente tesis tiene como objetivo principal el desarrollo de modelos que permitan analizar y diseñar el comportamiento dinámico de sólidos estructurados cuando el efecto de escala es relevante, manteniendo el compromiso de un coste computacional reducido. Ante la diversidad de tipologías estructurales que tendrían cabida en este estudio, se han seleccionado dos casos que permiten aplicar las diferentes metodologías de modelado que se han comentado anteriormente, y que recogen algunos de los más relevantes fenómenos derivados del efecto de escala (direccionalidad, aislamiento), así como otros, como la no linealidad, que enriquecen el estudio y amplían las posibilidades de aplicación.

1.2. Problemas estudiados. Motivación

1.2.1. Sólido periódico placa-viga. Modelo de celda

Dentro de los problemas representativos de sólidos estructurados que se pueden resolver haciendo uso de modelos de celda, se ha seleccionado el análisis de un sólido compuesto por una placa de grandes dimensiones, sobre la que se conecta un conjunto de vigas perpendiculares. Dada la periodicidad del sistema y su linealidad (se considera que la placa y las vigas tienen un comportamiento elástico y lineal y sufren pequeños desplazamientos), se puede hacer uso de la metodología basada en el teorema de Bloch que, esencialmente, permite conocer el comportamiento del sólido completo a partir de las soluciones obtenidas para una celda unitaria representativa, lo cual significa un importante ahorro de coste computacional.

Este tipo de sistemas ha sido analizado por diferentes autores (Eremeyev et al. [30, 31], Pennec et al. [32], Wu et al. [33], Wu et al. [34], Huang [35], Collet et al. [36], Achaoui et al. [37] y Colombi et al. [38]) en una amplia variedad de aplicaciones, desde cristales para la generación de un haz láser [2] (Fig. 1.4), hasta sistemas de protección de infraestructuras frente a ondas sísmicas [38]. Algunos de estos estudios se centran en substratos que tienen una distribución periódica de vigas cortas [32, 36, 33, 34, 35] (Fig. 1.5).

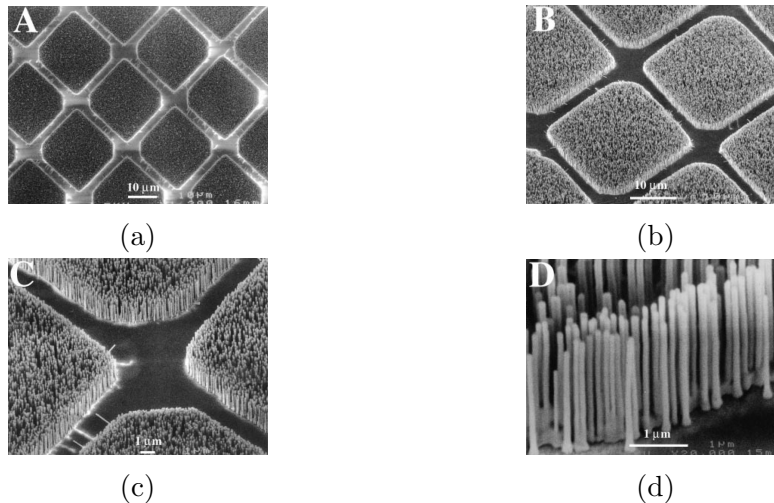


Figura 1.4: Imágenes SEM un nanolaser ultravioleta [2].

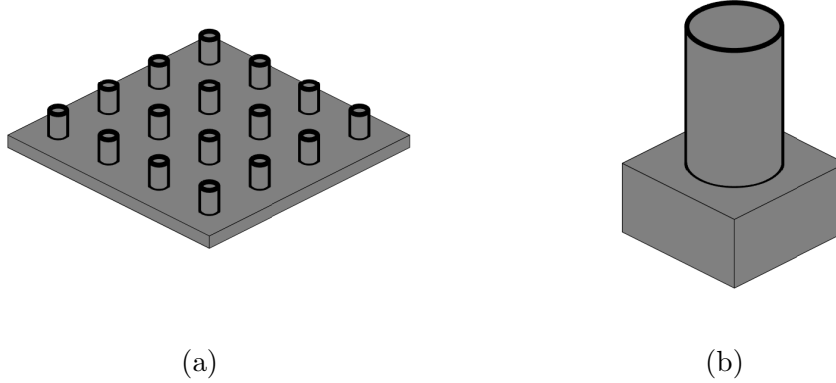


Figura 1.5: Substrato con distribución periódica de vigas cortas con sección transversal circular: (a) estructura *lattice* (b) modelo de celda.

El interés de estos sistemas radica en su capacidad de atenuar, orientar en direcciones preferentes, o incluso eliminar la propagación de ondas con determinadas características, las cuales se pueden seleccionar con un adecuado diseño del sistema. Este comportamiento es debido a la estructura interna del sólido (vigas situadas sobre la placa siguiendo un determinado patrón) y no se puede reproducir si se opta por una distribución densa de vigas como la considerada en el estudio de Eremeyev et al. [31]. En dicho estudio se pierde gran cantidad de información sobre diversos fenómenos presentes en la dinámica del sólido, tales como la existencia de *band gaps*, propagación anisótropa de las ondas, entre otros, dado que obvia la existencia de una estructura interna, relacionada en definitiva con los efectos de escala. Sin embargo, haciendo uso de modelos de celda como los que se utilizan en esta tesis, que tiene en cuenta la influencia, tanto de las propiedades de las vigas, como de su distribución espacial, es posible recuperar los efectos de escala que se manifiestan en este tipo de sistemas.

Por lo tanto, con esta investigación se pretende analizar en profundidad este tipo de sólidos estructurados, con objeto de comprender su comportamiento dinámico y avanzar en el diseño optimizado de los mismos.

1.2.2. Cable tenso estructurado. Modelo del Continuo Generalizado

Dentro de los problemas representativos de sólidos estructurados que se pueden resolver haciendo uso de modelos del Continuo Generalizado, se ha elegido el de la vibración no lineal de un cable estructurado sometido a una tensión inicial. Esta tipología puede ser representativa de un nanocable dado que, en la nanoescala, la longitud de onda de la perturbación puede ser próxima a la distancia característica de la estructura interna del elemento.

Los nanocables se han utilizado como sensores de diversa tipología. Así, Verbridge et al. [39] muestran cómo se pueden usar estos dispositivos para identificar masas del orden del zeptogramo añadidas sobre él, analizando el cambio de la frecuencia de resonancia en relación a la del cable sin masa. También, Leimann et al. [40] desarrollan un dispositivo basado en nanocables para la detección de radiación electromagnética del orden del Terahercio. Otros trabajos relacionados con el uso de nanocables pueden encontrarse en los trabajos de Qin et al. [41] y Kudaibergenov et al. [42].

Para abordar los problemas relacionados con el comportamiento dinámico no lineal de nanoestructuras en general se utilizan, esencialmente, dos aproximaciones: a) las basadas en la continualización del discreto, y b) las que se apoyan en modelos axiomáticos del Continuo. Estas aproximaciones tratan de sustituir los análisis basados en la resolución numérica del problema discreto original, con formulaciones próximas a la de la Dinámica Molecular, cuyo coste computacional es muy importante, a veces prohibitivo.

En particular, el problema del cable tenso no lineal ha sido tratado mediante la MMCC, dando lugar a soluciones que no recogen los efectos de escala cuando las longitudes de onda son próximas a las de la microestructura subyacente [43, 44, 45]. No se conocen desarrollos para resolver este problema con modelos del Continuo Generalizado que palién este inconveniente, lo que motiva el inicio de una investigación con el objetivo de formular un modelo de este tipo.

Por lo tanto, en la segunda parte de la tesis, se analiza el problema de las vibraciones no lineales de un cable con microestructura, usando tanto una técnica de continualización no estándar, como aplicando una teoría del

Continuo Generalizado: la Elasticidad con Gradiente de Inercia.

1.3. Objetivos

Así pues, la presente tesis se divide en dos bloques, cada uno de ellos dedicado al análisis de cada uno de los problemas mencionados anteriormente. Para cada parte se han trazado los siguientes objetivos generales y específicos.

El objetivo general de la primera parte de la tesis consiste en desarrollar modelos de celda para analizar los efectos de escala que aparecen en el comportamiento dinámico de un sólido estructurado compuesto por una placa de pequeño espesor sobre la que se conecta una distribución periódica de vigas esbeltas dispuestas en dirección perpendicular a la placa.

Para conseguir dicho objetivo general es preciso cumplir otros específicos indicados a continuación:

- Formulación del problema de propagación de ondas en la estructura *lattice*placa-viga mediante un modelo de celda adecuado a cada una de las configuraciones que se consideran.
- Establecimiento de una metodología para la resolución numérica del problema, haciendo uso de la teoría de Bloch.
- Identificación de los grupos adimensionales de parámetros que afectan a la solución del problema.
- Estudio de las propiedades dispersivas del sólido estructurado, con objeto de analizar su capacidad de atenuar, dirigir o, incluso, eliminar la propagación de ondas.
- Análisis paramétrico para determinar la influencia de estos grupos en la respuesta del sistema.

El objetivo general de la segunda parte de la tesis es el de desarrollar un modelo continuo generalizado para analizar los efectos de escala que aparecen en el comportamiento dinámico no lineal de un cable tenso estructurado. Los objetivos específicos para alcanzar el objetivo principal se detallan a continuación:

- Formulación de un modelo discreto del cable que recoja los efectos de escala. Este modelo se utilizará como referencia.
- Continualización del modelo discreto con objeto de obtener las correspondientes ecuaciones de gobierno continuas.
- Formulación de un modelo del continuo generalizado capaz de reproducir los efectos de escala.
- Identificación de los parámetros de escala a partir de los parámetros físicos del problema.
- Validación los modelos continuos propuestos, por comparación con el discreto de referencia.

Aunque se plantean problemas relacionados con dos tipologías diferentes, que además requieren de técnicas de resolución distintas, ambos responden al interés de avanzar en el conocimiento de los efectos de escala en sólidos estructurados, y en las técnicas adecuadas para su modelado.

1.4. Contenidos

Esta tesis está organizada en seis capítulos, el primero de los cuales es esta introducción general.

El segundo capítulo está dedicado a introducir algunos conceptos fundamentales relativos a la propagación de ondas en estructuras lattice. En el tercer capítulo se presenta el estudio de propagación de ondas en la estructura *lattice*placa-viga, donde se recogen las aportaciones originales de esta tesis correspondientes a este primer problema estudiado.

En el cuarto capítulo se hace una revisión de los principales modelos continuos generalizados utilizados en la actualidad para el análisis de problemas con efectos de escala. En el quinto capítulo se desarrolla un modelo continuo generalizado para el análisis de vibraciones no lineales en un cable estructurado, capaz de reproducir el efecto de escala. En este capítulo se recogen las aportaciones originales relacionadas con el segundo problema estudiado en la tesis.

En el sexto y último capítulo se presentan las conclusiones generales derivadas de la tesis, y se indican posibles trabajos futuros para continuar con esta investigación.

Posteriormente se detallan algunos desarrollos técnicos específicos que, por sus características, se ha optado por incluir en varios apéndices (7.3 al 7.3). El texto concluye con la lista de referencias bibliográficas utilizadas.

1.5. Contribuciones originales

Se presentan a continuación los principales contribuciones originales referentes a las dos partes de esta tesis doctoral.

En relación a la primera parte, relativa al sólido periódico placa-viga:

- La consideración de la estructura interna del sólido (vigas situadas sobre la placa siguiendo un determinado patrón), incluyendo la geometría de la distribución, ha permitido poner de manifiesto los efectos de escala en el comportamiento del sistema. En particular, en la presencia de *band gaps* y en la propagación de ondas según direcciones preferentes. Estos efectos de escala no se han evidenciado en estudios anteriores, en los que se ha resuelto el problema obviando dicha estructura interna.
- Se han identificado los grupos de parámetros que influyen en la respuesta del sistema, lo que permite una mejor comprensión de su comportamiento dinámico, así como un adecuado diseño, de acuerdo con los requerimientos que se pretendan cumplir. En este sentido, el estudio contenido en esta tesis es más completo que otros que se pueden encontrar en la literatura, sobre sólidos estructurados, en los que los análisis paramétricos son más específicos.
- En estudios previos, en los que se consideran resonadores masa-muelle acoplados a un soporte, se ha concluido que la frecuencia del band gap coincide con la del resonador. En este trabajo se muestra que esta regla no se puede generalizar cuando se utilizan resonadores, como los usados en esta tesis, más complejos y, por otra parte, más realistas.

En relación a la segunda parte, relativa al cable tenso estructurado:

- Se ha desarrollado un modelo discreto para el análisis de las vibraciones no lineales de un cable tenso estructurado, el cual pone de manifiesto los efectos de escala presentes en el problema. La continualización estándar (de Taylor) del modelo discreto conduce a las ecuaciones de gobierno que se pueden obtener a partir de las hipótesis del Continuo Clásico, confirmando así la idoneidad del modelo discreto elegido.
- Se han derivado las ecuaciones de gobierno continuas mediante la continualización no estándar del modelo discreto, las cuales recogen efectos de escala mediante un parámetro relacionado con las características del sistema.
- Se han derivado las ecuaciones de gobierno usando un modelo del Continuo Generalizado basado en la teoría de Elasticidad con Gradiente de Inercia, que también tienen en cuenta el efecto de escala. Estas ecuaciones coinciden formalmente con las obtenidas mediante las técnicas no estándar de continualización. Esta coincidencia permite relacionar el parámetro de escala de este modelo con las propiedades de la estructura discreta.
- Por comparación de los resultados del modelo discreto y de los continuos (generalizado y clásico), se ha puesto de manifiesto la superioridad del propuesto en esta tesis para recoger los efectos de escala presentes en el problema estudiado.

Conviene destacar que todos los resultados presentados en esta tesis se han obtenido con herramientas de cálculo de desarrollo propio.

Capítulo 2

Introducción a la propagación de ondas en sólidos estructurados

En el presente capítulo se van a introducir algunos conceptos esenciales relativos a la propagación de ondas en sólidos estructurados, así como la metodología para aplicar los modelos de celda. Los conceptos más importantes relacionados con este estudio son: celda unitaria, teorema de Bloch, zona de Brillouin y relación de dispersión. Estos conceptos, además de otros derivados, van a ser introducidos en primer lugar de forma general para el sólido bidimensional. A continuación, se utilizarán dichos conceptos para el análisis del comportamiento dinámico de tres estructuras *lattice* unidimensionales mediante modelos de celda. La primera se corresponde con la cadena monoatómica 1D, también denominada cadena de *Born-Von Kármán*, compuesta por un serie de masas idénticas con interacción lineal a primeros vecinos. La segunda estructura *lattice* es la cadena diatómica 1D que se diferencia de la monoatómica al alternar dos masas de distinto valor a lo largo de la cadena. Finalmente, en la tercera estructura *lattice* se estudiará una extensión del problema monoatómico 1D en el que a cada masa se añade un sistema masa-muelle haciendo la función de resonador interno. Este último problema es de gran importancia porque establece las bases de otro más complejo, que se estudiará en el siguiente capítulo, y que se corresponde con una placa de grandes dimensiones a la que se añade una distribución periódica de vigas, que hacen las funciones de resonadores internos.

2.1. Definición de sólido estructurado

Un sistema puede ser considerado un sólido periódico o una estructura *lattice* o, por simplicidad, un *lattice* cuando presenta una periodicidad interna, es decir, cuando puede ser obtenido a partir de la repetición de un subsistema, generalmente denominado celda unitaria, en una o varias direcciones del espacio (Fig. 2.1). Estas direcciones están definidas por los vectores base del *lattice*.

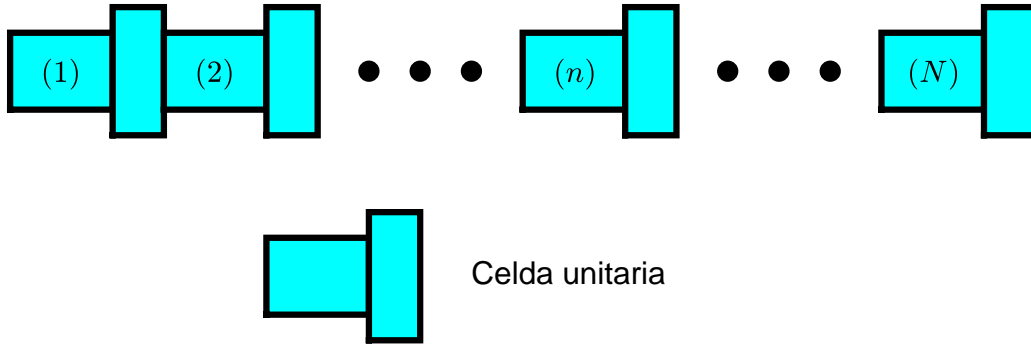


Figura 2.1: Ejemplo de estructura *lattice* y de celda unitaria.

El sistema periódico, junto con los vectores base, se denomina *lattice* directo. La figura 2.2 muestra un *lattice* bidimensional genérico de celda unitaria rectangular de dimensiones $a \times b$ cuyos vectores base \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 están definidos como

$$\mathbf{e}_1 = a\mathbf{i}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{e}_2 = b\mathbf{j}. \quad (2.2)$$

Cada una de las celdas unitarias que componen una estructura *lattice* se identifica mediante números enteros. Por ejemplo, en la figura 2.2, cada celda se ha identificado por la pareja (n_1, n_2) . La celda unitaria (n_1, n_2) resulta de trasladar la celda unitaria $(0, 0)$, considerada de referencia, n_1 veces en la dirección \mathbf{e}_1 y n_2 veces en la dirección \mathbf{e}_2 . Esto permite expresar la posición \mathbf{r}_{n_1, n_2}^P de un punto P del *lattice* situado en la celda (n_1, n_2) a partir de la posición $\mathbf{r}_{0,0}^P$ del punto equivalente en la celda unitaria de referencia $(0, 0)$ como

$$\mathbf{r}_{n_1, n_2}^P = \mathbf{r}_{0,0}^P + \mathbf{R}_{n_1, n_2}, \quad (2.3)$$

donde \mathbf{R}_{n_1, n_2} es el vector de posición de la celda unitaria (n_1, n_2) respecto de la de referencia, definido como

$$\mathbf{R}_{n_1, n_2} = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 = n_1 a \mathbf{i} + n_2 b \mathbf{j}. \quad (2.4)$$

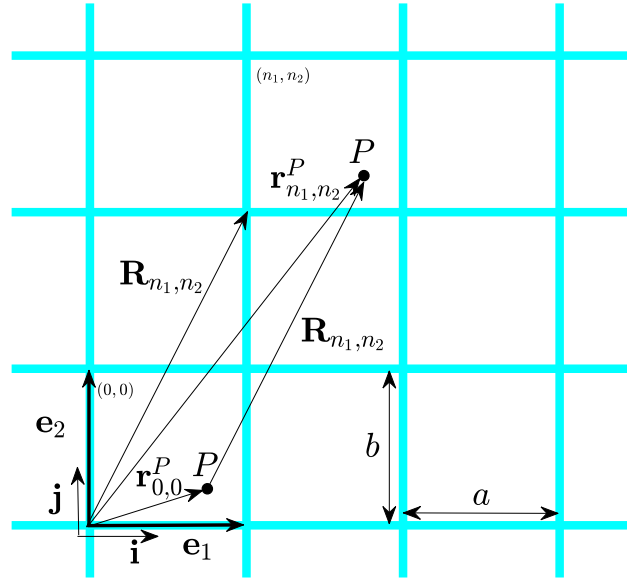


Figura 2.2: Ejemplo de *lattice* bidimensional con celda unitaria rectangular.

La celda unitaria de un *lattice* no siempre está unívocamente definida. En la figura 2.3 se muestra una estructura *lattice* con dos posibles celdas unitarias, siendo una de ellas irreducible, definida esta como la de menor tamaño que puede reproducir el sistema completo por repetición. Como se puede observar, la celda unitaria de la derecha está compuesta por cuatro celdas unitarias irreducibles.

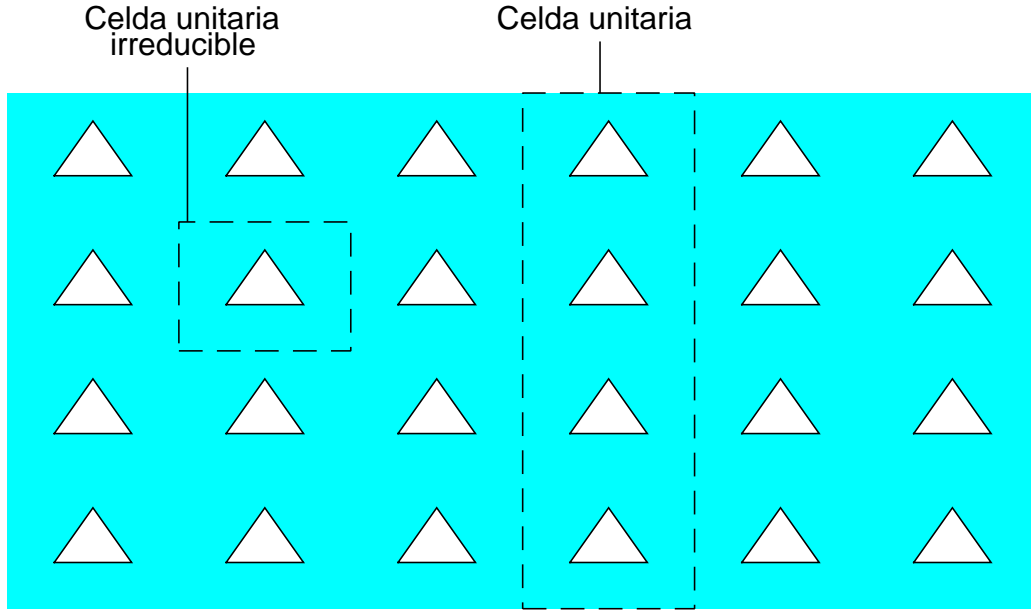


Figura 2.3: Diferencia entre celda unitaria y celda unitaria irreducible.

Así mismo, la celda unitaria irreducible no es única en general. En la figura 2.4 se muestra la existencia de dos celdas unitarias irreducibles de dimensiones características a y b para un mismo *lattice*. La elección de una u otra se basa en consideraciones relativas a la aplicación y naturaleza del problema y al tipo de análisis que se quiere realizar. Es recomendable elegir una celda unitaria irreducible adecuada que facilite la aplicación de la metodología de análisis. Por ejemplo, para el análisis de propagación de ondas mediante modelos de celda se emplea el teorema de Bloch, que se desarrollará más adelante. Esta metodología reduce el estudio de la propagación de ondas del sistema completo exclusivamente al de la celda unitaria de referencia, y se basa en establecer unas condiciones de ligadura entre los puntos del contorno de la celda unitaria. Por tanto, una elección adecuada de la celda unitaria irreducible facilita su aplicación.

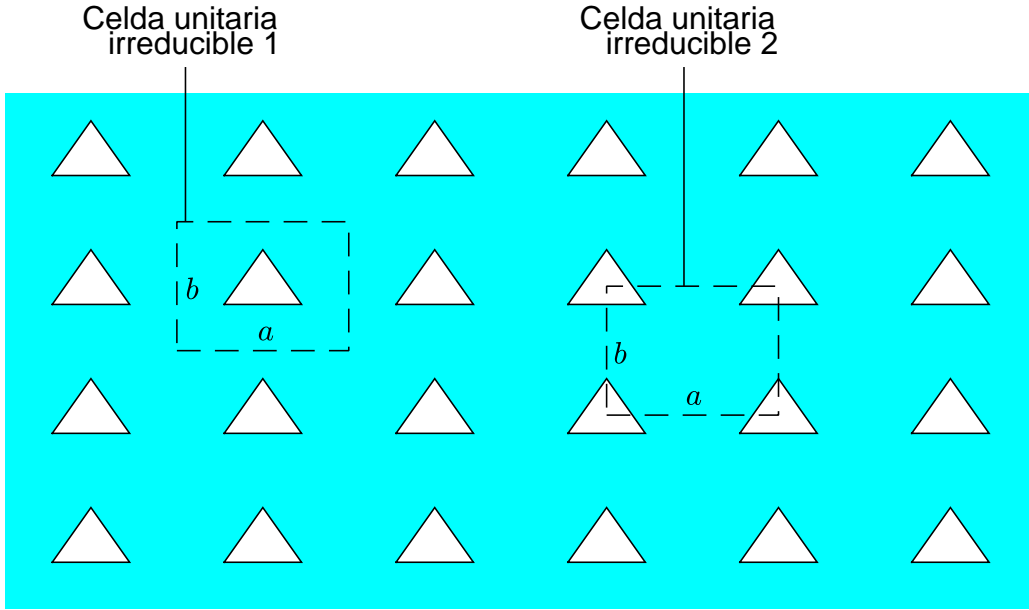


Figura 2.4: Celdas unitarias irreducibles de dimensiones características a y b .

2.2. Propagación de ondas en estructuras *lattice*

Esta parte de la tesis se centra en el estudio de la propagación de ondas planas en estructuras *lattice* cuya dinámica está gobernada por una ecuación lineal. Una onda plana que se propaga por un sólido queda completamente caracterizada por la siguiente expresión

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (2.5)$$

donde

- \mathbf{r} es el vector posición de un punto material.
- t es el tiempo.
- $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ es la amplitud de la onda para un punto material y un instante de tiempo dados.

- u_0 es la amplitud máxima de la onda.
- \mathbf{k} es el vector de onda cuya dirección indica su dirección de propagación. El número de onda κ se define como el módulo del vector de onda $\kappa = |\mathbf{k}|$ y está asociado a la longitud de onda λ mediante la expresión $\lambda = 2\pi/\kappa$.
- ω es la frecuencia angular.
- ‘.’ representa el producto escalar.

La figura 2.5 muestra la representación espacio temporal de una onda plana para un medio unidimensional.

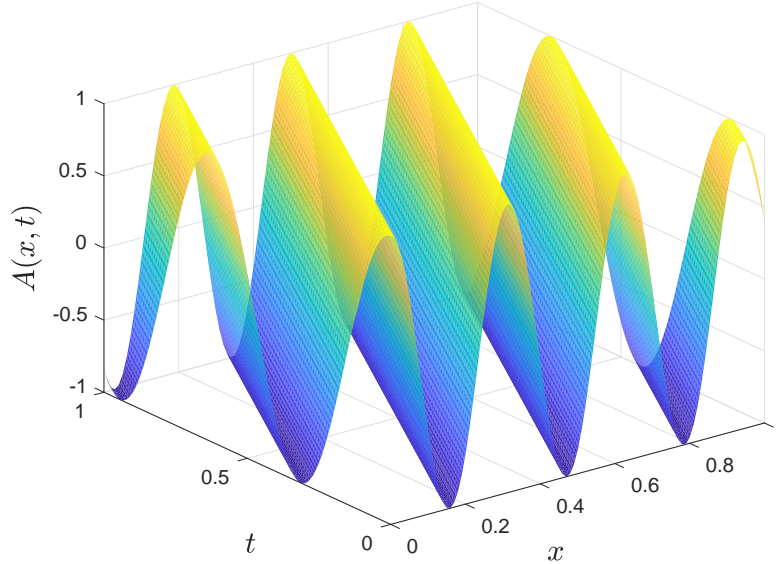


Figura 2.5: Onda armónica plana para un medio unidimensional.

La *dispersión* es un fenómeno que aparece en determinados medios (sólidos o líquidos) por el cual ondas de diferente longitud de onda se propagan a velocidades diferentes. Si bien esta tesis se centrará en la propagación de ondas mecánicas, en óptica se puede encontrar un ejemplo característico del fenómeno de la dispersión, que se corresponde con un haz de luz blanca atravesando un prisma (Fig. 2.6). La luz blanca está compuesta por una mezcla de ondas de longitud correspondiente al rango visible y que se propagan a la

misma velocidad en el aire. Cuando el haz atraviesa el prisma, las componentes de diferente longitud de onda se propagan a velocidades distintas entre sí, dando lugar a una separación entre ellas y permitiendo observar todos los colores del espectro visible.

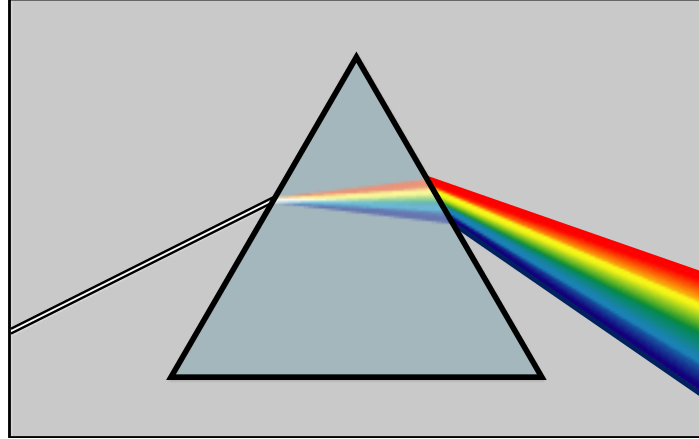


Figura 2.6: Propagación de la luz blanca a través de un medio dispersivo.

Así pues, se puede definir un medio como dispersivo cuando en él tiene lugar el efecto de la dispersión. En cambio, un medio no dispersivo es aquel en el que ondas de diferente longitud de onda tienen la misma velocidad de propagación. El fenómeno de dispersión está estrechamente ligado a la relación existente entre la frecuencia y el vector de onda de una onda que se propaga por el medio. Esta relación, denominada relación de dispersión, queda determinada por las características geométricas y mecánicas del medio.

A continuación se presentan los conceptos de relación de dispersión y teorema de Bloch. La aplicación de este teorema permite la utilización de modelos de celda para la obtención de la relación de dispersión de la estructura *lattice*.

2.2.1. Relación de dispersión

La relación de dispersión proporciona información relevante relativa a la propagación de ondas en el sólido. Como principal característica, la relación de dispersión indica la frecuencia con la que se propaga una onda con un

determinado vector de onda, y viceversa. A partir de esta relación se puede determinar si el sólido es dispersivo (velocidad dependiente del número de onda), si existe direccionalidad (velocidad dependiente de la dirección, para una misma frecuencia) o permitir la identificación de rangos de frecuencia para los cuales las ondas no se propagan. Estos rangos se conocen como *band gaps*.

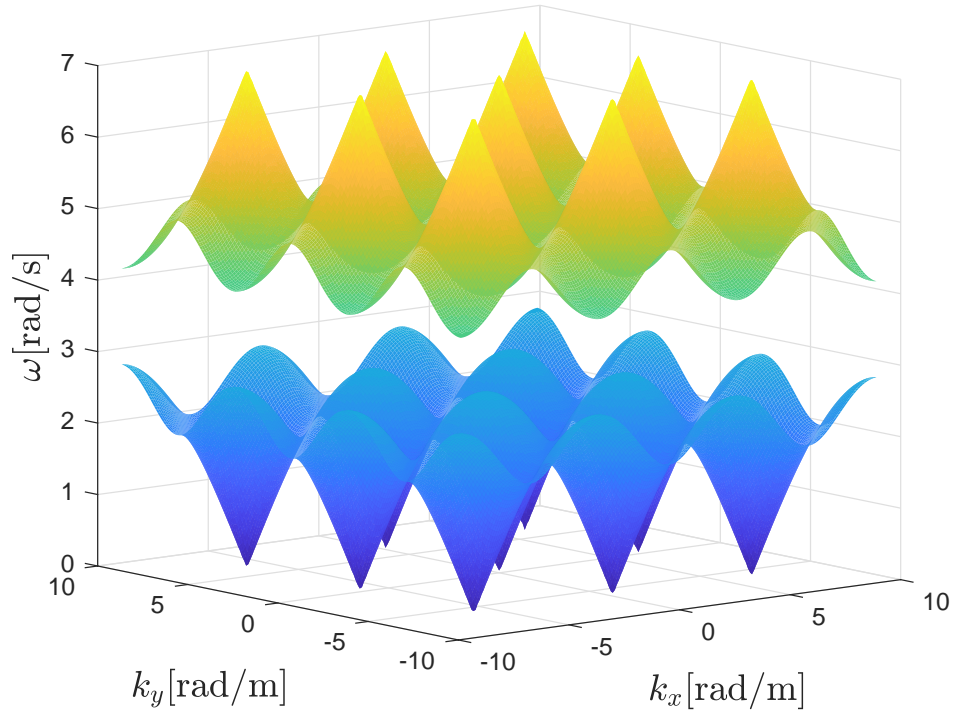


Figura 2.7: Ejemplo de relación de dispersión para un sólido bidimensional.

Para un sólido bidimensional la relación de dispersión que vincula la frecuencia ω con el vector de onda $\mathbf{k} = [k_x, k_y]$ expresado según el sistema de coordenadas cartesiano se define mediante una expresión del tipo

$$\omega = \omega(k_x, k_y). \quad (2.6)$$

Dependiendo del sólido, esta función puede ser multivaluada, es decir, para cada vector de onda pueden existir diversos valores de frecuencia para los

cuales las ondas se propagan. Estas frecuencias definen las denominadas superficies de dispersión o modos. Habitualmente, estas superficies se numeran en orden creciente con los correspondientes valores de frecuencia. La figura 2.7 muestra un ejemplo de relación de dispersión compuesta por dos superficies. Como se puede observar, existe un rango de frecuencias entre ambas superficies donde la relación de dispersión no está definida, dando lugar a un *band gap*, un concepto relevante sobre el que se volverá más tarde.

A partir de las superficies de dispersión expresadas mediante la ecuación (2.6), se pueden obtener los dos tipos de velocidades que caracterizan la propagación de ondas: velocidad de fase y velocidad de grupo. La velocidad de fase es la velocidad a la que se propaga una onda caracterizada por una frecuencia y un vector de onda determinados. La velocidad de grupo es la velocidad de la envolvente de todas las fases que componen la onda, es decir, es la velocidad a la que se propaga el paquete de ondas. Para un sólido bidimensional las velocidades de fase y grupo se calculan mediante las expresiones

$$\mathbf{v}_{\text{fase}} = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|^2} \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}_{\text{grupo}} = \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial k_x}, \frac{\partial \omega}{\partial k_y} \right\}^T. \quad (2.7)$$

En la figura 2.8 se muestra la propagación de un paquete de ondas de diferente longitud de onda a través de un sólido no dispersivo y otro dispersivo. La línea delgada representa el paquete de ondas y la línea gruesa representa su envolvente. Se han identificado el mismo punto de una fase y de la envolvente para diferentes instantes de tiempo, trazándose una línea para visualizar su evolución. Como se puede observar, para un sólido no dispersivo (Fig. 2.8a), los puntos de la fase y envolvente se desplazan la misma distancia en cada instante de tiempo, siendo iguales los valores absolutos de las velocidades de fase y grupo. Esto indica que todas las fases se propagan a la misma velocidad. En cambio, para un sólido dispersivo (Fig. 2.8b), los puntos se desplazan una distancia distinta en cada instante de tiempo, siendo distintos los valores absolutos de las velocidades.

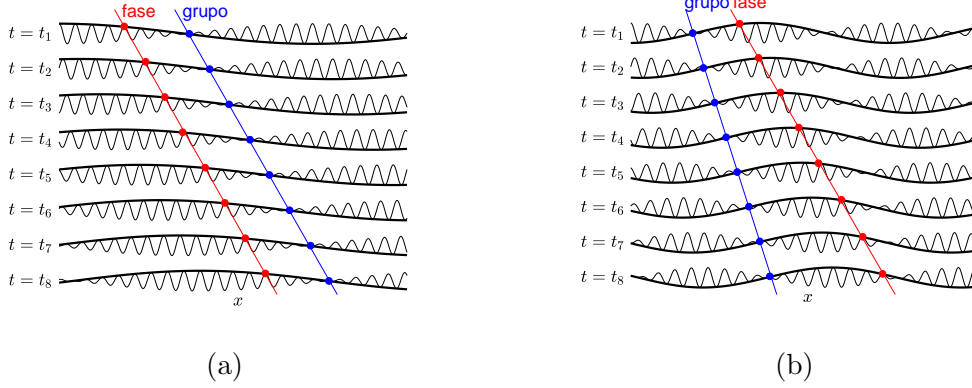


Figura 2.8: Comparación entre un sólido (a) no dispersivo, y otro (b) dispersivo.

La relación de dispersión de una estructura *lattice* presenta también la propiedad de periodicidad. Las superficies de dispersión son periódicas en el espacio de los números de onda [46]. La figura 2.9 muestra la representación gráfica, mediante líneas de iso-frecuencia, de las superficies de dispersión representadas en la figura 2.7. De la misma manera que existe una estructura *lattice* en el espacio físico, existe una estructura *lattice* recíproca a esta en el espacio de números de onda. El cuadrado $ABCD$ se corresponde con la celda unitaria del *lattice* recíproco y se denomina Primera Zona de Brillouin [8] (PZB, en adelante). Los vectores \mathbf{b}_1 y \mathbf{b}_2 son los vectores base del *lattice* recíproco. Se puede comprobar que se reproduce la totalidad de las superficies de dispersión repitiendo la relación de dispersión correspondiente a la PZB en las direcciones de los vectores base \mathbf{b}_1 y \mathbf{b}_2 .

Cada una de las celdas unitarias del *lattice* recíproco se puede identificar mediante números enteros. La celda unitaria del *lattice* recíproco (h_1, h_2) resulta de trasladar la celda unitaria $(0, 0)$, considerada de referencia, h_1 veces en la dirección \mathbf{b}_1 y h_2 veces en la dirección \mathbf{b}_2 . Esto permite expresar el vector de onda \mathbf{k}_{h_1, h_2}^Q de un punto Q del *lattice* situado en la celda (h_1, h_2) a partir del vector de onda $\mathbf{k}_{0,0}^Q$ del punto equivalente en la celda unitaria de referencia $(0, 0)$ como

$$\mathbf{k}_{h_1, h_2}^Q = \mathbf{k}_{0,0}^Q + \mathbf{G}_{h_1, h_2}, \quad (2.8)$$

donde \mathbf{G}_{h_1, h_2} es el vector de posición de la celda unitaria (h_1, h_2) respecto de

la de referencia, definido como

$$\mathbf{G}_{h_1, h_2} = h_1 \mathbf{b}_1 + h_2 \mathbf{b}_2. \quad (2.9)$$

Los vectores base y la PZB del *lattice* recíproco se obtienen a partir de los vectores base del *lattice* directo. Para un *lattice* bidimensional, los vectores base del *lattice* directo \mathbf{e}_i ($i = 1, 2$) se transforman en los vectores base del *lattice* recíproco \mathbf{b}_j ($j = 1, 2$) pertenecientes al espacio de los números de onda a través de la siguiente expresión

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{b}_j = 2\pi\delta_{ij}, \quad (2.10)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$). La PZB se corresponde con la intersección de las zonas delimitadas por [47]

$$\mathbf{G}_{h_1, h_2} \cdot \left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{G}_{h_1, h_2}}{2} \right) = 0, \quad (2.11)$$

cuando h_1 y h_2 toman valores $0, \pm 1$. En el Apéndice 7.3 se aplica esta metodología a un determinado *lattice* directo para la obtención de los vectores base y PZB del *lattice* recíproco correspondiente.

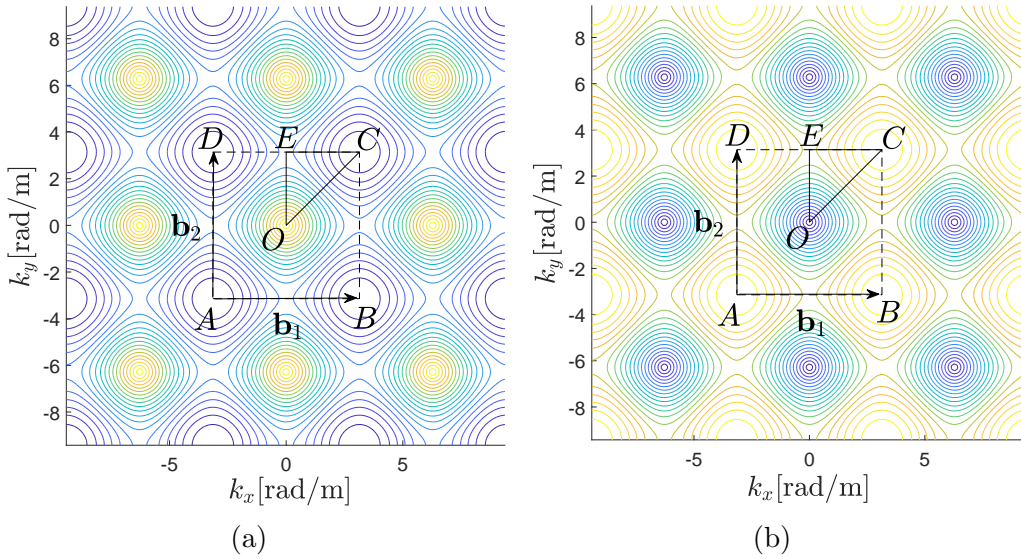


Figura 2.9: Representación de las superficies de dispersión, representadas en la figura 2.7, mediante líneas de iso-frecuencia: (a) primera superficie, (b) segunda superficie.

La importancia de la PZB radica en la periodicidad de la relación de dispersión en el espacio de los números de onda. Así, si $\mathbf{k} = [k_x, k_y]$ es un vector de onda cualquiera fuera de la PZB perteneciente a la celda unitaria (h_1, h_2) , entonces existe un único vector de onda \mathbf{k}_0 perteneciente a la PZB tal que

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \mathbf{G}_{h_1, h_2}. \quad (2.12)$$

La relación de dispersión correspondiente a un *lattice* directo bidimensional definida mediante la expresión

$$\omega = \omega(\mathbf{k}) \quad (2.13)$$

verifica la propiedad de periodicidad

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}_0 + \mathbf{G}_{h_1, h_2}) = \omega(\mathbf{k}_0). \quad (2.14)$$

Por tanto, obteniendo la relación de dispersión para valores de número de onda dentro de la PZB, se obtienen automáticamente las características dispersivas del *lattice* directo para cualquier vector de onda. Además, dentro de la PZB se pueden utilizar las simetrías presentes de la relación de dispersión y reducir aún más el número de vectores de onda requeridos para definirla completamente. La figura 2.9 muestra estas simetrías respecto a rectas orientadas en la dirección de los segmentos OC y OE . Por tanto, es suficiente con obtener la relación de dispersión para valores del vector de onda contenidos en el triángulo OCE para definir las características dispersivas del *lattice* directo. La región OCE se denomina zona irreducible de la PZB.

La verdadera utilidad de la zona irreducible se manifiesta al analizar la existencia de *band gaps*. Se ha definido como *band gap* el rango de frecuencias donde la relación de dispersión no está definida para ningún vector de onda. Kittel [48] afirma que los *band gaps* se corresponden con aquellas frecuencias sobre el perímetro de la zona irreducible donde la relación no está definida. La figura 2.10 muestra mediante líneas gruesas los valores de las frecuencias correspondientes a la relación de dispersión sobre el perímetro de la zona irreducible $OCEO$ para la relación de dispersión representada en las figuras 2.7 y 2.9. Estas líneas se denominan curvas de dispersión. En el eje horizontal, s representa la distancia recorrida a lo largo de dicho perímetro, partiendo desde el punto O ($k_x = 0, k_y = 0$). Se puede observar la existencia

del mencionado *band gap* entre las dos superficies. El rango de frecuencias para los que la onda no se propaga está limitado superior e inferiormente por los valores de las curvas de dispersión en el punto C de la PZB.

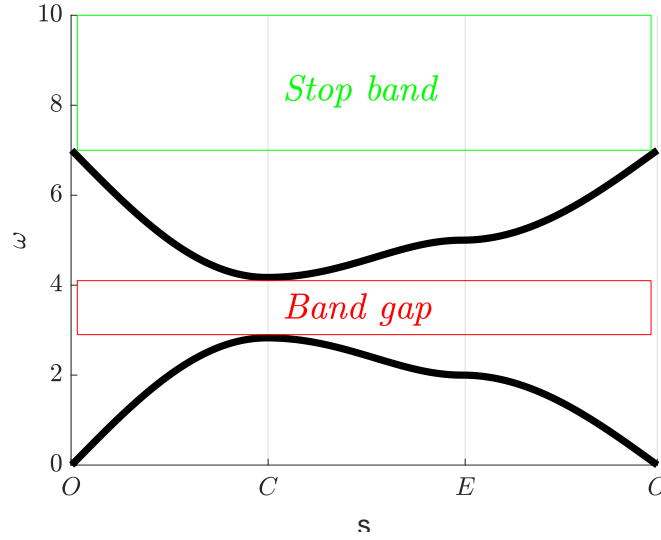


Figura 2.10: *Band gap* y *stop band* para la relación de dispersión representada en las figuras 2.7 y 2.9.

La figura 2.10 también muestra por encima de la segunda curva de dispersión una zona de frecuencias donde la relación de dispersión no está definida. Esta zona se denomina *stop band* y se corresponde igualmente con zonas de atenuación. A diferencia de los *band gaps*, el *stop bands* solo está limitado inferiormente por la relación de dispersión. Al conjunto de *band gaps* y *stop band* se suele denominar *estructura de bandas*.

Es importante destacar que la atenuación de las ondas para los valores de frecuencia correspondientes a los *band gaps* y *stop bands* se producen sin amortiguamiento, es decir, sin disipación de energía. Esta atenuación se produce como consecuencia de dos fenómenos distintos: *Bragg scattering* y *resonancias internas*. El primero aparece cuando longitud de la onda es próxima a la dimensión característica de la celda unitaria. El segundo se debe exclusivamente a las frecuencias naturales de los resonadores y son independientes de la dimensión característica de la celda. Más adelante, en la sección de-

dicada al análisis de propagación de ondas en *lattice* unidimensionales, se extenderán estos conceptos.

2.2.2. Teorema de Bloch

La aplicación del teorema de Bloch permite analizar la propagación de ondas en estructuras *lattice* utilizando modelos de celda. Su aplicación posibilita la obtención de la relación de dispersión de la estructura completa analizando exclusivamente una celda unitaria. Esencialmente, el teorema de Bloch establece cómo cambia la amplitud de la onda al propagarse de una celda a otra. A continuación se presenta el teorema de Bloch en su forma general, para después presentar la metodología para su aplicación a un modelo de celda discretizada.

Definición

El teorema de Bloch [49] establece que el cambio de amplitud de la onda que se propaga de celda a celda no depende de la posición de la celda dentro del *lattice*.

Sea $\mathbf{u}(\mathbf{r}_{0,0}^P)$ el vector desplazamiento de un punto P de la celda unitaria de referencia $(0,0)$ de un *lattice* bidimensional, siendo $\mathbf{r}_{0,0}^P$ su vector de posición. Si se admite una solución de onda plana, entonces $\mathbf{u}(\mathbf{r}_{0,0}^P)$ es de la forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}_{0,0}^P) = \mathbf{u}_P e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{0,0}^P)}, \quad (2.15)$$

donde \mathbf{u}_P es la amplitud. El teorema de Bloch establece que el vector desplazamiento del correspondiente punto P de la celda (n_1, n_2) , con vector de posición \mathbf{r}_{n_1, n_2}^P (definido en la Ec. (2.3)), se obtiene como

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}_{n_1, n_2}^P) &= \mathbf{u}(\mathbf{r}_{0,0}^P) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_{n_1, n_2}^P - \mathbf{r}_{0,0}^P)} = \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}_{0,0}^P) e^{i\mathbf{k} \cdot (n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2)} &= \mathbf{u}(\mathbf{r}_{0,0}^P) e^{i(n_1 k_1 + n_2 k_2)}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde $k_1 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_1$ y $k_2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_2$ son las componentes del vector de onda en las direcciones de los vectores base del *lattice* directo.

Aplicación al modelo de celda discretizada

Se presenta a continuación la metodología para la aplicación del teorema de Bloch a un modelo de celda con el objetivo de obtener la relación de

dispersión correspondiente a la propagación de ondas mecánicas. Se va a describir el procedimiento para una celda unitaria genérica modelada mediante el Método de los Elementos Finitos (MEF, en adelante). Asimismo, esta metodología puede aplicarse a modelos de celda discretos en origen, como se mostrará en la próxima sección.

Se considera la celda unitaria discretizada de la figura 2.11 correspondiente a un *lattice* bidimensional genérico. En la figura se muestra el contorno de la celda en la que se han identificado los nodos característicos de la malla atendiendo a su posición a partir de la discretización: interiores Q_I y de contorno inferior Q_B , derecho Q_R , superior Q_T e izquierdo Q_L , además de los situados en los vértices Q_{RB} , Q_{RT} , Q_{LT} y Q_{LB} .

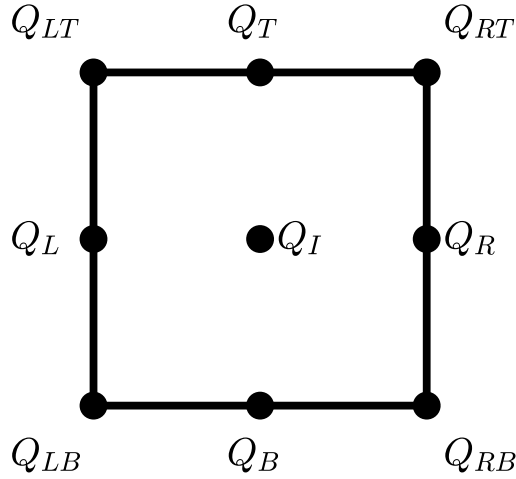


Figura 2.11: Celda unitaria con nodos característicos: interiores (Q_I), en los contornos (Q_R, Q_T, Q_L, Q_B) y en los vértices ($Q_{RT}, Q_{LT}, Q_{LB}, Q_{RB}$)

La metodología para la aplicación del teorema de Bloch y la obtención de la relación de dispersión sigue estos pasos:

1. Formulación del problema de vibraciones libres.

El problema de vibraciones libres del modelo de celda de la figura 2.11,

considerada esta con bordes libres y una vez planteada su discretización mediante el MEF, se expresa

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad (2.17)$$

donde \mathbf{K} y \mathbf{M} son las matrices de rigidez y masa, respectivamente, y \mathbf{U} es el vector de desplazamientos de los nodos de la malla de elementos finitos

$$\mathbf{U} = \{\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_B, \mathbf{u}_R, \mathbf{u}_T, \mathbf{u}_{LB}, \mathbf{u}_{RB}, \mathbf{u}_{LT}, \mathbf{u}_{RT}, \mathbf{u}_I\}^T, \quad (2.18)$$

donde el subíndice de \mathbf{u} hace referencia a los nodos identificados como interiores y de contorno. En la ecuación (2.17) (\bullet) representa la derivada temporal.

2. Establecimiento de condiciones de ligadura entre los desplazamientos de los nodos del contorno.

Se utiliza la ecuación (2.16) para establecer una relación entre los desplazamientos de los nodos del contorno de la celda unitaria. Por ejemplo, el desplazamiento de los nodos Q_R pertenecientes al contorno derecho, \mathbf{u}_R , se liga al desplazamiento de los nodos Q_L pertenecientes al contorno izquierdo, \mathbf{u}_L , como

$$\mathbf{u}_R \stackrel{\text{Bloch}}{=} \mathbf{u}_L e^{i(k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 0)} = \mathbf{u}_L e^{ik_1}. \quad (2.19)$$

Extendiendo el procedimiento al resto de nodos de los contornos se obtienen las siguientes condiciones de ligadura de los desplazamientos

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_T &= e^{ik_2} \mathbf{u}_B, & \mathbf{u}_{RB} &= e^{ik_1} \mathbf{u}_{LB}, \\ \mathbf{u}_{RT} &= e^{i(k_1 + k_2)} \mathbf{u}_{LB}, & \mathbf{u}_{LT} &= e^{ik_2} \mathbf{u}_{LB}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Las relaciones de desplazamientos dadas por las ecuaciones (2.19) y

(2.20) se pueden expresar en forma matricial como

$$\mathbf{U} = \mathbf{W}\tilde{\mathbf{U}} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_L \\ \mathbf{u}_R \\ \mathbf{u}_B \\ \mathbf{u}_T \\ \mathbf{u}_{LB} \\ \mathbf{u}_{RB} \\ \mathbf{u}_{LT} \\ \mathbf{u}_{RT} \\ \mathbf{u}_I \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{I}e^{ik_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}e^{ik_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}e^{ik_1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}e^{ik_2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}e^{i(k_1+k_2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{U}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_L \\ \mathbf{u}_B \\ \mathbf{u}_{LB} \\ \mathbf{u}_I \end{Bmatrix},$$

siendo \mathbf{I} la matriz identidad y $\tilde{\mathbf{U}}$ el vector de desplazamientos reducido, donde se incluyen los desplazamientos nodales considerados independientes.

3. Obtención del problema de autovalores.

Si se admite una solución de onda plana para los desplazamientos en la ecuación (2.17) se obtiene

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}]\mathbf{U} = \mathbf{0}. \quad (2.22)$$

Sustituyendo las relaciones de desplazamientos (2.21) en (2.22) y pre-multiplicando con \mathbf{W}^H (Transpuesta Hermítica de \mathbf{W}) se obtiene

$$\mathbf{W}^H[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}]\mathbf{W}\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{W}^H\mathbf{0}, \quad (2.23)$$

que conduce a un problema de autovalores ¹en términos de los números de onda k_1 y k_2

$$[\mathbf{K}_r(k_1, k_2) - \omega^2 \mathbf{M}_r(k_1, k_2)]\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{0}, \quad (2.24)$$

donde $\mathbf{K}_r = \mathbf{W}^H \mathbf{K} \mathbf{W}$ y $\mathbf{M}_r = \mathbf{W}^H \mathbf{M} \mathbf{W}$ son las respectivas matrices de rigidez y de masa reducidas.

⁰La formulación del problema considera la celda unitaria aislada respecto del resto y, por tanto, no aparecen esfuerzos en el contorno debidos a la existencia de celdas vecinas. La consideración de estos esfuerzos \mathbf{F} [50, 51, 52] conduce a la misma formulación final debido a $\mathbf{W}^H \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

4. Obtención de los modos asociados a un vector de onda específico $[k_1^*, k_2^*]$.

La solución del problema de autovalores (2.24) definida mediante la ecuación característica

$$|\mathbf{K}_r(k_1^*, k_2^*) - \omega^2 \mathbf{M}_r(k_1^*, k_2^*)| = 0, \quad (2.25)$$

permite obtener las frecuencias ω correspondientes a la relación de dispersión $\omega(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ y asociadas al vector de onda $[k_1^*, k_2^*]$.

Adicionalmente, introduciendo estos valores en la ecuación (2.24) y resolviendo para $\tilde{\mathbf{U}}$ se obtienen las formas modales reducidas. A partir de la relación (2.21) se obtienen las formas modales \mathbf{U} correspondientes al modelo de celda.

5. Repetición del paso anterior para valores diferentes de k_1 y k_2 .

Esta metodología permite obtener la relación de dispersión para un conjunto de vectores de onda \mathbf{k} . Debido a la periodicidad de la relación de dispersión, la obtención de esta para los vectores de onda \mathbf{k} pertenecientes a la PZB conduce automáticamente a la obtención de la relación de dispersión para cualquier \mathbf{k} . Por el mismo motivo, si solo se requiere analizar la existencia de *band gaps* y el rango de valores de frecuencia donde estos existen, entonces es suficiente con aplicar esta metodología para los vectores de onda \mathbf{k} pertenecientes al perímetro de la zona irreducible de la PZB.

La metodología presentada se corresponde con el denominado *método inverso*. Como se ha explicado, mediante este método se obtienen los valores de frecuencia de las zonas de propagación y las zonas de atenuación (*band gaps* y *stop bands*). Sin embargo, este método, que es el más utilizado en la literatura para la obtención de la relación de dispersión, no permite obtener el nivel de atenuación que se produce en la onda para cada valor de frecuencia. Existe otra metodología diferente a la explicada aquí conocida como *método directo*. Este método consiste en obtener la relación de dispersión imponiendo un valor determinado de frecuencia y obteniendo el vector de onda. Mediante este método se obtiene, además de la relación de dispersión, información sobre el nivel de atenuación de la onda en los *band gaps* y *stop band*. El principal inconveniente de este método es que su implementación es más complicada que el método inverso para sólidos unidimensionales y la extensión a 2D es

un tema abierto para la investigación. El lector interesado puede consultar el trabajo de Hussein et al. [53]. En la siguiente sección se van a obtener las relaciones de dispersión de estructuras *lattice* unidimensionales mediante el método inverso, comparando estas con las obtenidas mediante el método directo.

2.3. Análisis de propagación de ondas en sólidos estructurados unidimensionales mediante modelos de celda

En las secciones anteriores se han presentado los conceptos más importantes relativos con la propagación de ondas en sólidos estructurados. Además, se ha presentado la metodología general para la obtención de la relación de dispersión para un sólido bidimensional mediante modelo de celda. Con el objetivo de clarificar estos conceptos y metodologías se va a analizar la propagación de ondas en tres estructuras *lattice* unidimensionales: la cadena monoatómica, la cadena diatómica y la cadena monoatómica con resonadores internos. Este último *lattice* se corresponde con un modelo simplificado de las estructuras *lattice* que se estudiarán en el siguiente capítulo.

2.3.1. *Lattice* monoatómico 1D

Se considera un *lattice* unidimensional compuesto por una cadena de partículas de masa m conectadas mediante muelles lineales de rigidez k como se muestra en la figura 2.12. La posición de la partícula n -ésima está definida como $x_n = nd$, siendo d la distancia entre partículas. La partícula n -ésima tiene un grado de libertad asociado al desplazamiento en dirección axial $u(x_n, t)$, adoptándose la siguiente notación $u_n = u(x_n, t)$.

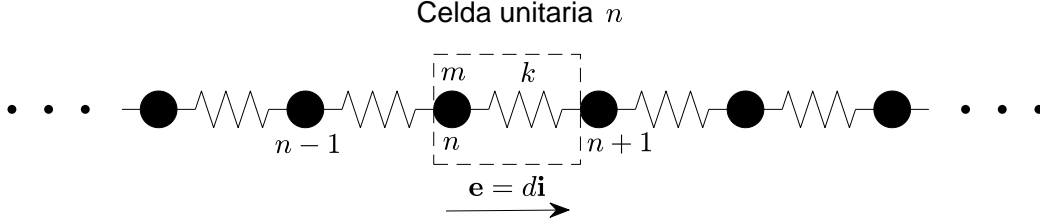


Figura 2.12: Cadena monoatómica con celda unitaria.

La relación de dispersión se obtiene como sigue. El modelo de celda se corresponde con la celda unitaria n -ésima de la figura 2.12 con vector base $\mathbf{e} = d\mathbf{i}$. El modelo presenta grados de libertad únicamente en los contornos de la celda. El problema de vibraciones libres del modelo queda definido como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad (2.26)$$

donde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{Bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{Bmatrix}. \quad (2.27)$$

A continuación, mediante la aplicación del teorema de Bloch se relacionan los desplazamientos de los puntos del contorno. El desplazamiento de la partícula $n+1$ -ésima se relaciona con el desplazamiento de la partícula n -ésima como

$$u_{n+1} \stackrel{\text{Bloch}}{=} u_n e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}} = u_n e^{i\kappa d} \quad (2.28)$$

donde $\mathbf{k} = \kappa\mathbf{i}$. El vector de desplazamientos puede expresarse entonces como

$$\mathbf{U} = \mathbf{W}\tilde{\mathbf{U}} \quad (2.29)$$

con

$$\mathbf{W} = \begin{Bmatrix} 1 \\ e^{i\kappa d} \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{U}} = \{u_n\}. \quad (2.30)$$

Si se admite una solución de onda plana para los desplazamientos de las partículas, la ecuación (2.26) se transforma en

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}]\mathbf{U} = \mathbf{0}. \quad (2.31)$$

Sustituyendo las relaciones de desplazamientos (2.29) en (2.31) y premultiplicando con \mathbf{W}^H (Transpuesta Hermítica de \mathbf{W}) se obtiene

$$\mathbf{W}^H[\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}]\mathbf{W}\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{W}^H\mathbf{0}, \quad (2.32)$$

que conduce a

$$[-\omega^2 m + 2k - k(e^{-i\kappa d} + e^{i\kappa d})]u_n = 0. \quad (2.33)$$

Si se desea obtener la solución no trivial ($u_n \neq 0$) se debe imponer

$$-\omega^2 m + 2k - k(e^{-i\bar{\kappa}} + e^{i\bar{\kappa}}) = 0, \quad (2.34)$$

de donde se puede despejar la frecuencia ω frente al número de onda κ

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}(1 - \cos \kappa d)}, \quad (2.35)$$

obteniéndose la relación de dispersión del *lattice* monoatómico 1D. Adicionalmente, se puede obtener la forma adimensional de la relación de dispersión (2.35) introduciendo la frecuencia adimensional $\Omega = \omega/\omega_0$, donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, y el número de onda adimensional $\bar{\kappa} = \kappa d$,

$$\Omega = \sqrt{2(1 - \cos \bar{\kappa})}. \quad (2.36)$$

Se presentan a continuación las principales características relativas a la propagación de ondas en la cadena monoatómica 1D.

Periodicidad

La figura 2.13 muestra la relación de dispersión $\Omega = \Omega(\bar{\kappa})$ definida por la ecuación (2.36) para valores del número de onda adimensional $\bar{\kappa} \in [-4\pi, +4\pi]$. Como se puede observar, la relación de dispersión es simétrica respecto de $\bar{\kappa} = 0$ y periódica de periodo 2π .

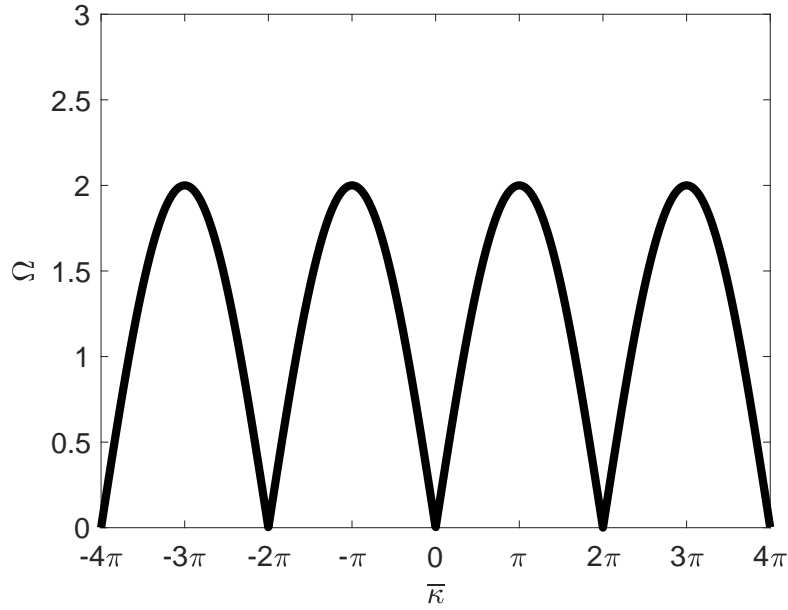


Figura 2.13: Relación de dispersión de la cadena monoatómica.

El intervalo del número de onda adimensional $\bar{\kappa} \in [-\pi, +\pi]$ ($\kappa \in [-\pi/d, +\pi/d]$) se corresponde con la PZB. Las curvas contenidas en dicho intervalo describen completamente la propagación de las ondas planas para cualquier valor de frecuencia y número de onda. La simetría de la curva de dispersión permite caracterizar completamente las propiedades dispersivas del *lattice* estudiando solo la mitad de la PZB ($\bar{\kappa} \in [0, +\pi]$), que se corresponde con la zona irreducible. Esta simetría es debida a que la propagación de una onda en el sentido positivo del vector base (de izquierda a derecha) para unos valores de Ω y $\bar{\kappa}$ determinados sería simétrica a la de la onda que se propaga en sentido negativo para los valores Ω y $-\bar{\kappa}$.

La periodicidad de la relación de dispersión revela que la frecuencia Ω de la onda es la misma para números de onda que verifiquen la relación $\bar{\kappa} + 2p\pi$, donde p es un número entero. La PZB ($p = 0$) está limitada por el número de onda $\kappa = \pi/d$, que se corresponde con un valor de longitud de onda $\lambda = 2\pi/\kappa = 2d$. Como ya se indicó en páginas anteriores, para conocer las características dispersivas de un *lattice* es suficiente con obtener la relación de dispersión para los números de onda dentro de la PZB que, para este caso, se

corresponde con longitudes de onda mayores que dos veces la distancia entre partículas ($\lambda \geq 2d$).

Dispersión

A partir de la relación de dispersión no lineal (2.36) se derivan la expresión de las velocidades de fase y de grupo

$$|v_{\text{fase}}| = \left| \frac{\omega}{\kappa} \right| = \omega_0 d \frac{|\sin \bar{\kappa}/2|}{|\bar{\kappa}/2|}, \quad |v_{\text{grupo}}| = \left| \frac{d\omega}{d\kappa} \right| = \omega_0 d |\cos \bar{\kappa}/2|, \quad (2.37)$$

lo que permite mostrar el carácter dispersivo de la cadena monoatómica. En la figura 2.14 se representan las velocidades de fase y de grupo en función de $\bar{\kappa}$. En la figura 2.14a se observa cómo la velocidad de fase disminuye con el número de onda, mientras que la figura 2.14b muestra la periodicidad de la velocidad de grupo.

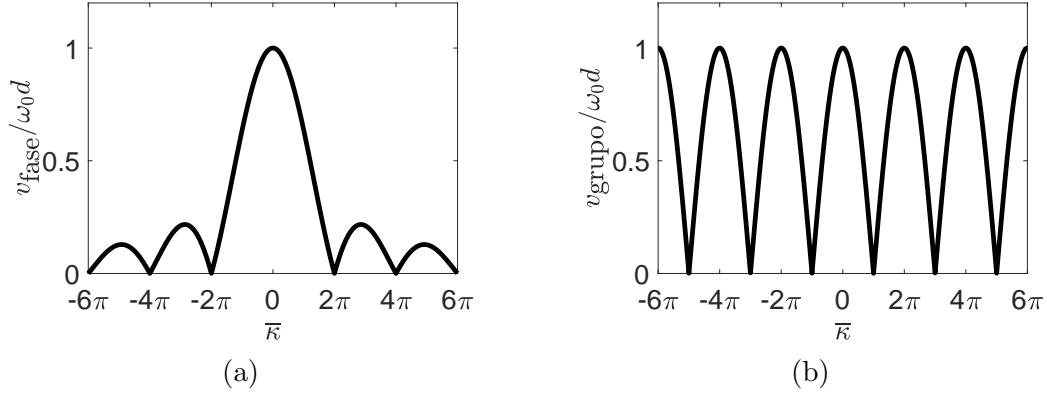


Figura 2.14: Velocidades de (a) fase y de (b) grupo.

Zonas de propagación y de atenuación

La solución de la relación de dispersión (2.36) para la zona irreducible de la PZB ($\bar{\kappa} \in [0, \pi]$) se representa en la figura 2.15a. Se puede comprobar cómo no existen valores del número de onda $\bar{\kappa}$ que den lugar a frecuencias $\Omega > 2$ y, por tanto, se corresponde con la zona de atenuación asociada a un *stop band*. En cambio, para $\Omega \in [0, 2]$ se corresponde con la zona de propagación sin atenuación.

La metodología que ha permitido obtener la relación de dispersión representada en la figura 2.15a está basada en el método inverso. Como se explicó en la sección anterior, existe un método alternativo denominado método directo que permite caracterizar la zona de atenuación. Si el método inverso permite obtener el valor de frecuencia para un vector de onda determinado, el método directo permite obtener el vector de onda para un valor de frecuencia determinado. Mediante este último método, para cada valor de frecuencia se obtiene un vector de onda complejo. La solución compuesta por los valores de la frecuencia y la parte real del vector de onda constituye la relación de dispersión, que se corresponde con la obtenida mediante el método inverso. En cambio, la solución compuesta por los valores de frecuencia y la parte imaginaria del vector de onda proporciona información sobre el nivel de atenuación en los *band gaps* y *stop bands*. La figura 2.15b muestra los resultados obtenidos de la aplicación del método directo. Como se puede observar, la curva correspondiente a la parte real de $\bar{\kappa}$ reproduce la curva de dispersión, mostrada en la figura 2.15a, obtenida mediante el método inverso. Así, $\bar{\kappa}$ es puramente real en la zona de propagación ($\Omega \in [0, 2]$) y complejo en el *stop band* ($\Omega > 2$). El valor nulo de la parte imaginaria $\bar{\kappa}$ indica que la propagación es sin atenuación. El *stop band* aparece para números de onda con parte real constante y parte imaginaria variable. La parte real con valor igual a π indica que el *stop band* aparece para ondas con longitud de onda $\lambda = 2d$ y, por tanto, se encuentra restringido al tamaño de celda y el fenómeno que lo genera es la *Bragg scattering*. La parte imaginaria es creciente con Ω y representa el nivel de atenuación que experimenta la onda. Valores elevados de la parte imaginaria indican niveles mayores de atenuación.

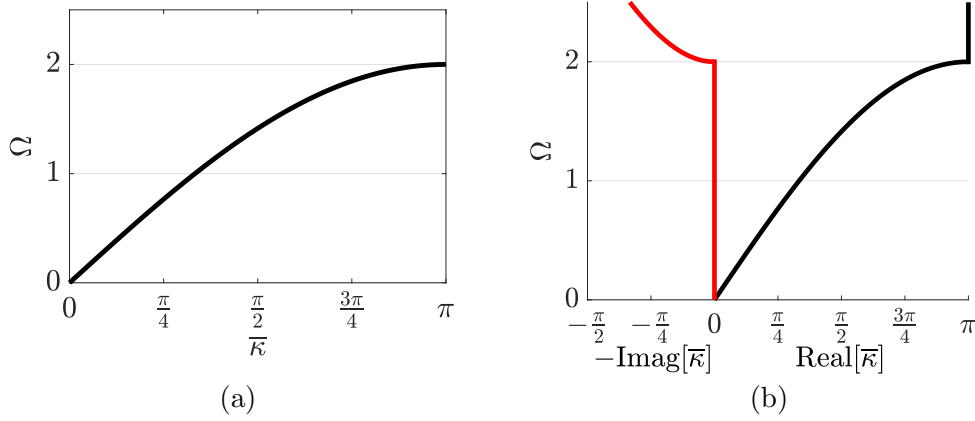


Figura 2.15: Relación de dispersión a partir del método (a) inverso y (b) directo.

Con el objetivo de mostrar las diferencias existentes entre la propagación de una onda con frecuencia perteneciente a la zona de propagación ($\Omega \in [0, 2]$) o a la zona de atenuación ($\Omega > 2$), se ha estudiado una cadena compuesta por un gran número de partículas que está sometida a una excitación armónica de frecuencia Ω en su extremo izquierdo (Fig. 2.16). Se ha obtenido para el mismo instante de tiempo la deformada de la cadena para valores de $\Omega = [1.99, 2.001, 2.01, 2.1]$. Dentro de la zona de propagación (Fig. 2.17a) todas las partículas están en movimiento, mientras que dentro del *stop band* (Figs. 2.17b-2.17d) la amplitud del movimiento decae a lo largo de la cadena. Se puede observar que cuanto mayor es Ω dentro del *stop band*, el nivel de atenuación aumenta, reduciéndose el número de partículas afectadas por la excitación.

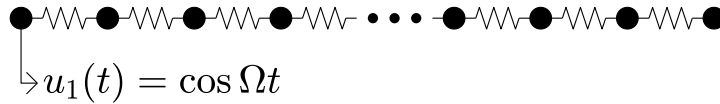


Figura 2.16: Esquema de cadena finita de 100 partículas.

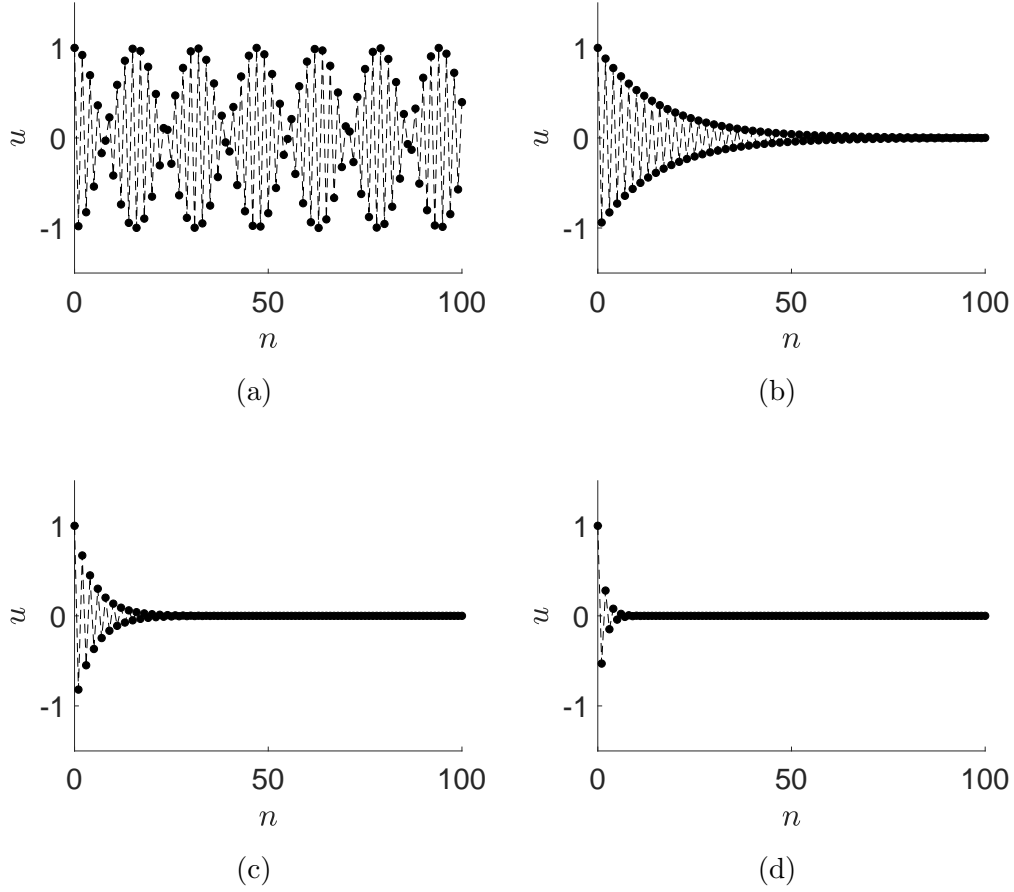


Figura 2.17: Deformada de la cadena para (a) $\Omega = 1.99$, (b) $\Omega = 2.001$, (c) $\Omega = 2.01$, (d) $\Omega = 2.1$.

El análisis de la cadena monoatómica ha permitido explicar los principales conceptos relativos a la propagación de ondas. El modelo que se presenta a continuación se corresponde con la cadena diatómica cuya celda unitaria consta de dos partículas con masas de distinto valor. Con este modelo se puede describir, entre otros fenómenos ondulatorios, la propagación de las ondas en la dirección $[1,1,1]$ del NaCl entre otros cristales [48].

2.3.2. *Lattice* diatómico 1D

Una simple extensión del problema del *lattice* monoatómico es el *lattice* diatómico mostrado en la figura 2.18, cuya celda unitaria está compuesta por dos partículas con masas diferentes m_1 y m_2 . La distancia entre ambas partículas es $d/2$. La partícula n -ésima tiene un grado de libertad asociado al desplazamiento en dirección axial $u_n = u(x_n, t)$.

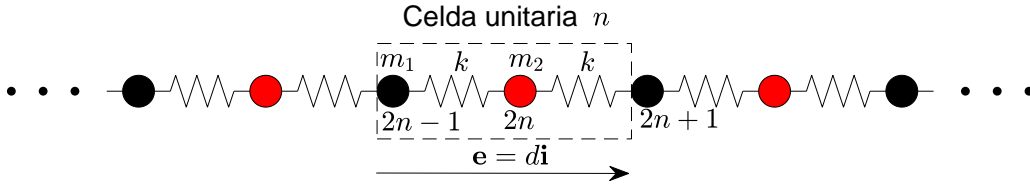


Figura 2.18: Cadena diatómica con celda unitaria.

La relación de dispersión se obtiene, mediante el método inverso, como sigue. El modelo de celda se corresponde con la celda unitaria n -ésima de la figura 2.18 con vector base $\mathbf{e} = d\mathbf{i}$. El modelo presenta dos grados de libertad en los contornos de la celda, que se corresponden con las partículas $2n - 1$ y $2n + 1$, y un grado de libertad correspondiente a la partícula interior $2n$. El problema de vibraciones libres del modelo queda definido como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad (2.38)$$

donde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{Bmatrix} u_{2n-1} \\ u_{2n} \\ u_{2n+1} \end{Bmatrix}. \quad (2.39)$$

A continuación, mediante la aplicación del teorema de Bloch se relacionan los desplazamientos de los puntos del contorno. El desplazamiento de la partícula $2n + 1$ -ésima se relaciona con el desplazamiento de la partícula $2n - 1$ -ésima como

$$u_{2n+1} \stackrel{\text{Bloch}}{=} u_{2n-1} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}} = u_{2n-1} e^{i\kappa d} \quad (2.40)$$

donde $\mathbf{k} = \kappa \mathbf{i}$. El vector de desplazamientos puede expresarse entonces como

$$\mathbf{U} = \mathbf{W} \tilde{\mathbf{U}} \quad (2.41)$$

con

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ e^{i\kappa d} & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{U}} = \begin{Bmatrix} u_{2n-1} \\ u_{2n} \end{Bmatrix}. \quad (2.42)$$

Si se admite una solución de onda plana para los desplazamientos de las partículas, la ecuación (2.26) se transforma en

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{U} = \mathbf{0}. \quad (2.43)$$

Sustituyendo las relaciones de desplazamientos (2.41) en (2.43) y premultiplicando con \mathbf{W}^H se obtiene

$$\mathbf{W}^H [\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{W} \tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{W}^H \mathbf{0}, \quad (2.44)$$

que conduce a

$$\begin{bmatrix} 2k - \omega^2 m_1 & -k(1 + e^{-i\kappa d}) \\ -k(1 + e^{i\kappa d}) & 2k - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{2n-1} \\ u_{2n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (2.45)$$

Para obtener la solución no trivial hay que imponer

$$\begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m_1 & -k(1 + e^{-i\kappa d}) \\ -k(1 + e^{i\kappa d}) & 2k - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.46)$$

La solución de (2.46) permite expresar la frecuencia ω en función del número de onda κ

$$\omega_{\pm} = \sqrt{k \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \pm k \sqrt{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^2 - \frac{4 \sin^2 \kappa d / 2}{m_1 m_2}}}, \quad (2.47)$$

que se corresponde con la relación de dispersión de la cadena diatómica 1D. Adicionalmente, se puede obtener la forma adimensional de la relación de dispersión 2.47 introduciendo la frecuencia adimensional $\Omega = \omega / \omega_0$, donde $\omega_0 = \sqrt{k / m_1}$, y el número de onda adimensional $\bar{\kappa} = \kappa d$,

$$\Omega_{\pm} = \sqrt{\frac{m_1}{k}} \sqrt{k \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \pm k \sqrt{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^2 - \frac{4 \sin^2 \bar{\kappa} / 2}{m_1 m_2}}}, \quad (2.48)$$

En la figura 2.19a se representa la relación de dispersión (2.48) obtenida para los valores $m_2 = 2m_1$, $m_1 = 1$, $k = 1$ y números de onda correspondientes a la zona irreducible de la PZB ($\bar{\kappa} \in [0, +\pi]$) que, como se puede observar, está compuesta por dos curvas. Las curvas inferior y superior se denominan *modo acústico* y *modo óptico*, respectivamente. Se observa un *band gap* entre ambas curvas y un *stop band* para frecuencias por encima del modo óptico. La anchura del *band gap* está determinada por la relación entre las masas m_2/m_1 y llega a ser cero para el caso límite de $m_2 = m_1$. Este caso se corresponde con el *lattice* monoatómico 1D que, como se ha mostrado, no presenta *band gap*.

La figura 2.19b muestra la relación de dispersión obtenida mediante el método directo. La curva correspondiente a la parte real de $\bar{\kappa}$ reproduce la curva de dispersión, mostrada en la figura 2.19a, obtenida mediante el método inverso. La figura 2.19b muestra cómo $\bar{\kappa}$ es puramente real en la zona de propagación y complejo en la zona de atenuación. En la zona de propagación las ondas se propagan sin atenuación como indica el valor nulo de la parte imaginaria de $\bar{\kappa}$. Los *band gap* y *stop band* aparecen para números de onda con parte real constante y parte imaginaria variable. La parte real de $\bar{\kappa}$, de valor π en el *band gap*, corresponde a longitudes de onda $\lambda = 2d$, lo que indica que el fenómeno que genera el *band gap* es la *Bragg scattering*. La parte imaginaria presenta un máximo para un determinado valor de Ω donde se alcanza la máxima atenuación dentro del *band gap*. El *stop band*, generado por la *Bragg scattering*, aparece para números de onda con parte real constante y parte imaginaria variable. El valor nulo de la parte real de $\bar{\kappa}$, debido a la periodicidad de la relación de dispersión, representa también el caso correspondiente a $\bar{\kappa} = 2\pi$ que se corresponde con longitudes de onda $\lambda = d$. De la misma forma que en el caso monoatómico, la cadena diatómica presenta mayor nivel de atenuación con valores crecientes de Ω en el *stop band*.

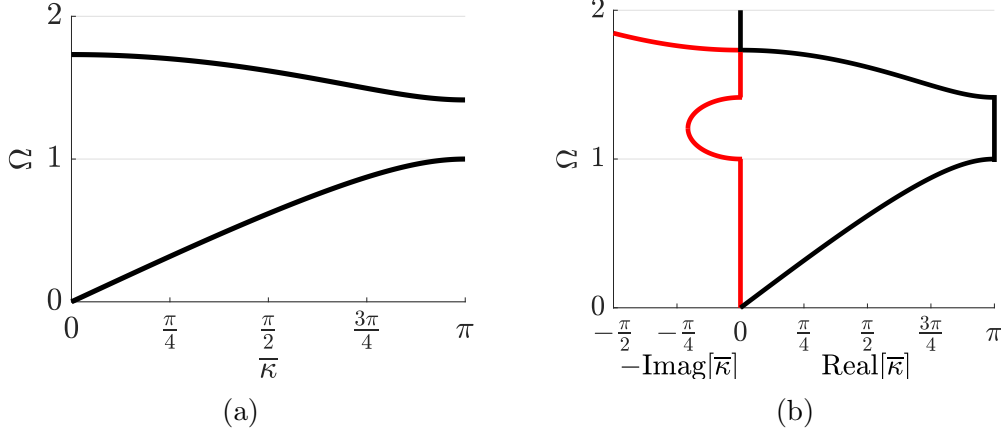


Figura 2.19: Relación de dispersión a partir del método (a) inverso y (b) directo.

En esta sección se ha estudiado la cadena diatómica que presenta un *band gap* debido al fenómeno de *Bragg scattering*. Los *band gaps* generados a partir de este fenómeno se obtienen para ondas cuya longitud de onda es múltiplo del tamaño de la celda unitaria y, por tanto, están estrictamente limitados a las dimensiones de esta. En la siguiente sección se estudia una cadena que dispone de resonadores internos, y que presenta un *band gap* para longitudes de onda independientes del tamaño de la celda unitaria.

2.3.3. *Lattice* monoatómico 1D con resonadores internos

Una extensión del caso del *lattice* monoatómico 1D mostrado en la figura 2.12 consiste en añadir un resonador de rigidez k_R y masa m_R a cada partícula de la cadena principal (Fig. 2.20). En esta configuración aparecen resonancias internas centradas en la frecuencia de resonancia del oscilador ($\omega_R = \sqrt{k_R/m_R}$), generándose un *band gap* alrededor de ω_R .

La partícula n -ésima tiene un grado de libertad asociado al desplazamiento en dirección axial $u_n = u(x_n, t)$. Se añade un resonador cuya partícula añade un grado de libertad u_n^* .

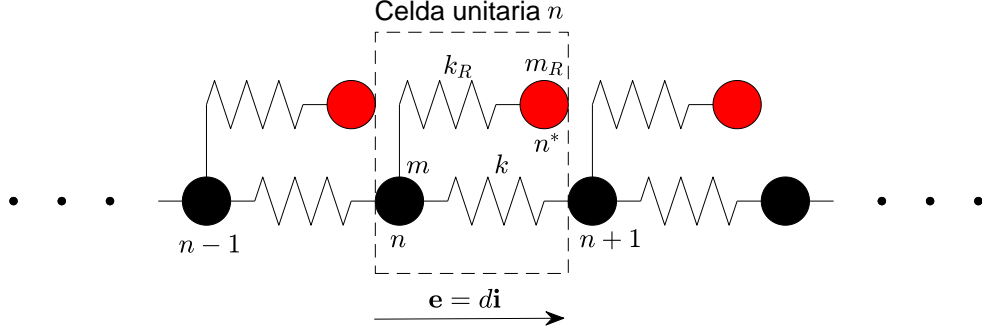


Figura 2.20: Cadena monoatómica con resonador interno y celda unitaria.

La relación de dispersión se obtiene, mediante el método inverso, como sigue. El modelo de celda se corresponde con la celda unitaria n -ésima de la figura 2.20. El modelo presenta dos grados de libertad en los contornos de la celda, que se corresponden con las partículas n y $n+1$, y un grado de libertad correspondiente a la masa del resonador. El problema de vibraciones libres del modelo queda definido como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad (2.49)$$

donde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_R \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k + k_R & -k & -k_R \\ -k & k & 0 \\ -k_R & 0 & k_R \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{Bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_n^* \end{Bmatrix}. \quad (2.50)$$

A continuación, mediante la aplicación del teorema de Bloch se relacionan los desplazamientos de los puntos del contorno. El desplazamiento de la partícula $n+1$ -ésima se relaciona con el desplazamiento de la partícula n -ésima como

$$u_{n+1} \stackrel{\text{Bloch}}{=} u_n e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}} = u_n e^{i\kappa d} \quad (2.51)$$

donde $\mathbf{k} = \kappa \mathbf{i}$. El vector de desplazamientos puede expresarse entonces como

$$\mathbf{U} = \mathbf{W}\tilde{\mathbf{U}} \quad (2.52)$$

con

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ e^{i\kappa d} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{U}} = \begin{Bmatrix} u_n \\ u_n^* \end{Bmatrix}. \quad (2.53)$$

Si se admite una solución de onda plana para los desplazamientos de las partículas, la ecuación (2.26) se transforma en

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{U} = \mathbf{0}. \quad (2.54)$$

Sustituyendo las relaciones de desplazamientos (2.52) en (2.54) y premultiplicando con \mathbf{W}^H se obtiene

$$\mathbf{W}^H [\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{W} \tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{W}^H \mathbf{0}, \quad (2.55)$$

que conduce a

$$\begin{bmatrix} k(2 - e^{-i\kappa d} - e^{i\kappa d}) - \omega^2 m & -k_R \\ -k_R & k_R - \omega^2 m_R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n \\ u_n^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (2.56)$$

Para obtener la solución no trivial hay que imponer

$$\begin{vmatrix} k(2 - e^{-i\kappa d} - e^{i\kappa d}) - \omega^2 m & -k_R \\ -k_R & k_R - \omega^2 m_R \end{vmatrix} = 0. \quad (2.57)$$

La solución de (2.57) permite obtener una ecuación que relaciona la frecuencia ω y el número de onda κ

$$2k(1 - \cos \kappa d) - m\omega^2 - \frac{m_R k_R \omega^2}{k_R - m_R \omega^2} = 0 \quad (2.58)$$

que se corresponde con la relación de dispersión de la cadena monoatómica 1D con resonadores internos. Adicionalmente, se puede obtener la forma adimensional de la relación de dispersión (2.58) introduciendo las variables adimensionales $\Omega = \omega/\omega_0$, donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $\Omega_R = \omega_R/\omega_0$ y $\bar{m}_R = m_R/m$, que define la relación entre las masas del resonador y de la partícula de la cadena principal, y $\bar{\kappa} = \kappa d$

$$2(1 - \cos \bar{\kappa}) - \Omega^2 \left(1 + \frac{\bar{m}_R}{1 - \Omega^2/\Omega_R^2} \right) = 0. \quad (2.59)$$

La figura 2.21a representa la relación de dispersión (2.59) obtenida para los valores $\Omega_R = 1$ y $\overline{m}_R = 0,1$ y números de onda correspondientes a la zona irreducible de la PZB ($\bar{\kappa} \in [0, +\pi]$). Como se puede observar, la relación de dispersión está compuesta por dos curvas separadas por un *band gap* centrado aproximadamente en la frecuencia de resonancia Ω_R del oscilador. La anchura del *band gap* queda definida por $\Omega_R(\sqrt{1 + \overline{m}_R} - 1)$. Además se observa un *stop band* para frecuencias superiores a las de la segunda curva.

La figura 2.21b muestra la relación de dispersión obtenida mediante el método directo. La curva correspondiente a la parte real de $\bar{\kappa}$ reproduce la curva de dispersión, mostrada en la figura 2.21a, obtenida mediante el método inverso. La figura 2.21b muestra cómo $\bar{\kappa}$ es puramente real en el rango de propagación y complejo en el *stop band*. Sin embargo, en el *band gap*, $\bar{\kappa}$ es imaginario puro. A diferencia de la cadena diatómica, el *band gap* se genera para valores imaginarios puros del número de onda. Esto indica que este no está restringido por el tamaño de la celda unitaria, pudiendo existir para cualquier número de onda. El valor de Ω_R puede ajustarse para posicionar el *band gap* a la frecuencia requerida. Esto es una ventaja respecto a los *band gaps* generados a partir de la *Bragg scattering*, pero puede presentar dificultades en la práctica. Cuanto menor sea la frecuencia requerida para el *band gap*, se van a necesitar valores más elevados de masa y/o reducidos de rigidez en el resonador, pudiendo ser inviable desde el punto de vista del diseño. De la misma forma que en los casos anteriores, la cadena monoatómica con resonadores internos presenta un *stop band* debido a la *Bragg scattering* y muestra mayor nivel de atenuación con valores crecientes de Ω .

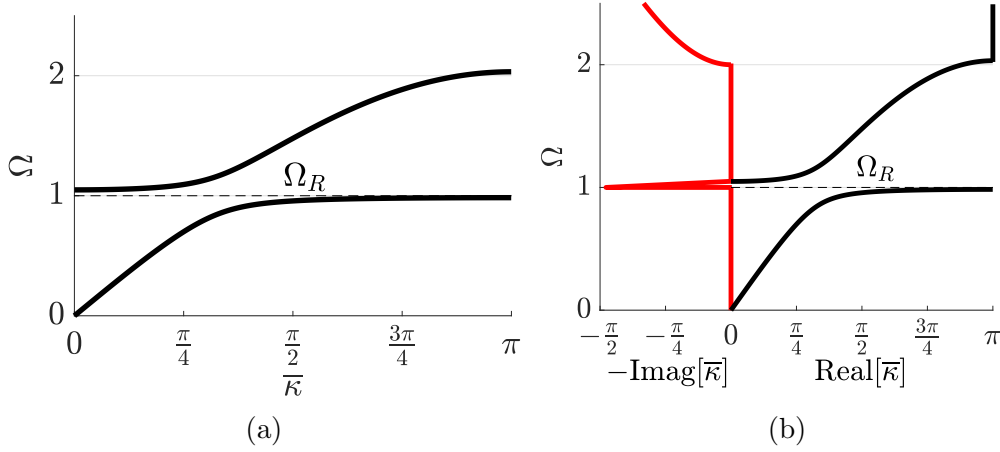


Figura 2.21: Relación de dispersión a partir del método (a) inverso y (b) directo.

En este capítulo se han presentado los conceptos más importantes relativos a la propagación de ondas en estructuras *lattice*. Se ha mostrado la metodología general para el análisis de la propagación de ondas en estructuras *lattice* bidimensionales, para después ser aplicada a tres *lattices* unidimensionales. En el siguiente capítulo se va a estudiar un *lattice* compuesto por una placa infinita con una distribución periódica de vigas. En analogía con la cadena monoatómica con resonadores internos estudiada en esta sección, la placa tendría las funciones de la cadena principal y las vigas actuarían como los resonadores. El *lattice* placa-viga representa un modelo más complejo que la cadena unidimensional y la existencia de un *band gap* para las frecuencias de resonancia de las vigas no está asegurada. Este fenómeno será analizado también en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Análisis de la propagación de ondas en estructuras *lattice* placa-viga

En este capítulo se analiza el comportamiento dinámico de una placa delgada que realiza la función de sustrato de una distribución periódica de vigas esbeltas perpendiculares a la placa, formando así una estructura *lattice*. Sus características dispersivas se estudian mediante modelos de celda con el objetivo de poder ser utilizado para la atenuación y direccionalidad de las ondas.

La metodología para obtener las características dispersivas de la estructura *lattice* está basada en la teoría de Bloch. Este análisis se realiza con un modelo de celda resuelto mediante el Método de los Elementos Finitos. Debido al elevado número de parámetros mecánicos y geométricos que influyen en el comportamiento dinámico del *lattice*, se realiza un análisis dimensional del problema. Este análisis revela tres grupos adimensionales de parámetros que determinan el comportamiento dinámico del *lattice*.

Se han considerado tres tipos de configuración para la distribución periódica de las vigas: *cuadrada*, *triangular* y *hexagonal*. La denominación de cada configuración hace referencia a la posición de los puntos de unión de las vigas sobre la placa. Estos puntos se corresponden con los vértices de un cuadrado, un triángulo equilátero y un hexágono regular respectivamente, distribuidos en la placa. Para cada configuración se obtiene la relación de

dispersión, que permite determinar la estructura de bandas y la direccionalidad de las ondas. A partir del análisis dimensional, se analiza la influencia de los diferentes grupos de parámetros en la posición y anchura de los *band gaps*. Como se observará, en general estos *band gaps* no aparecen alrededor de las frecuencias naturales de las vigas, como ocurría en el caso de la cadena unidimensional con resonadores internos. El origen de este resultado se justificará posteriormente mediante el análisis de un *lattice* compuesto por una viga que realiza la función de sustrato sobre la que se conecta una distribución periódica de vigas verticales. Este estudio simplificado mostrará que para resonadores más complejos que los compuestos por un sistema masa-muelle, la generación de *band gaps* a las frecuencias naturales del resonador no puede ser generalizada.

3.1. Formulación del problema

Se considera un sistema formado por una placa delgada de espesor t paralela al plano $\{X,Y\}$ con una distribución periódica de vigas con eje en dirección Z perpendicular a dicho plano, rígidamente unidas a la placa por los extremos inferiores. Los desplazamientos y rotaciones de la placa en el punto de unión son iguales a los del extremo inferior de la viga. La placa tiene densidad superficial ρ y rigidez a flexión D . Las vigas tienen longitud l , densidad lineal ρ_* , rigidez a flexión C idéntica en las direcciones X e Y , y se consideran inextensibles.

Se desea estudiar la influencia de la distribución de las vigas, además de sus propiedades mecánicas en relación a las de la placa, en la propagación de las ondas por la placa delgada. Se han considerado tres configuraciones para la distribución de las vigas: cuadrada, triangular y hexagonal. La posición de las vigas sigue una distribución periódica sobre el plano $\{X,Y\}$ de forma que el sistema es una estructura *lattice*. Los puntos de unión de las vigas sobre la placa para cada una de estas tres configuraciones se produce en los vértices de un cuadrado, un triángulo equilátero y un hexágono regular, respectivamente. En las figuras 3.1a-3.3a se muestran las vistas isométrica de cada una de las configuraciones. En las figuras 3.1b-3.3b se presentan, sombreadas sobre la vista en planta, las correspondientes celdas unitarias irreducibles de las diferentes configuraciones. Las celdas unitarias irreducibles consisten en una viga en el centro de un sustrato cuadrado para la configuración cuadrada,

una viga en el centro de un substrato rómbico constituido por dos triángulos equiláteros para la configuración triangular, y dos vigas en el centro de dos triángulos equiláteros para la distribución hexagonal. La tabla 3.1 muestra los vectores base del *lattice* \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 y sus correspondientes vectores recíprocos \mathbf{b}_1 y \mathbf{b}_2 expresados a partir de una dimensión característica a , que coincide con la distancia entre las vigas de dos celdas consecutivas en dirección X.

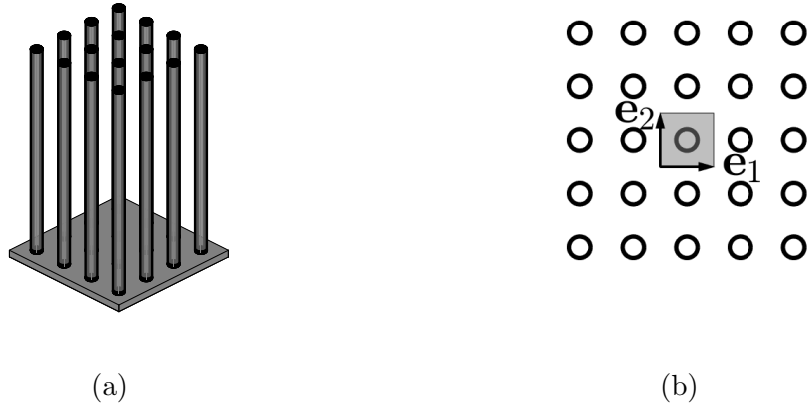


Figura 3.1: Configuración cuadrada: (a) Vista isométrica, (b) Vista en planta con celda unitaria primitiva sombreada.

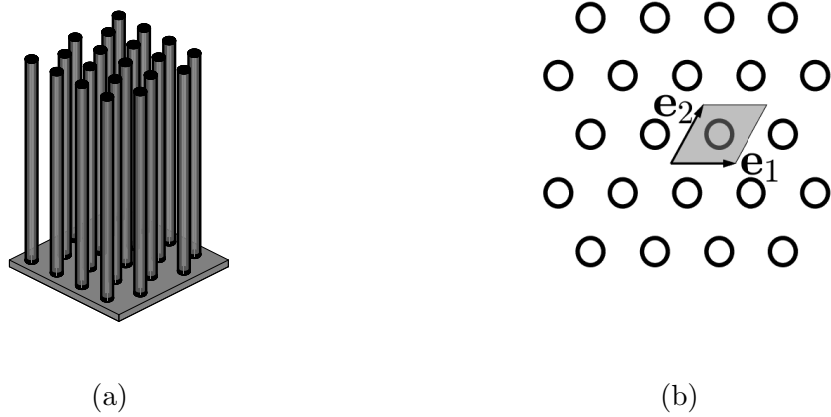
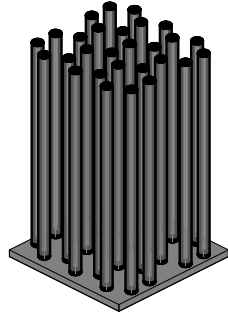
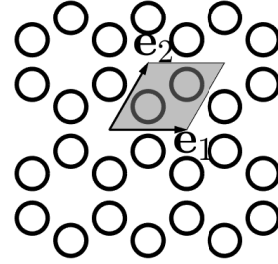


Figura 3.2: Configuración triangular: (a) Vista isométrica, (b) Vista en planta con celda unitaria primitiva sombreada.



(a)



(b)

Figura 3.3: Configuración hexagonal: (a) Vista isométrica, (b) Vista en planta con celda unitaria primitiva sombreada.

Configuración	\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_2	\mathbf{b}_1	\mathbf{b}_2
Cuadrada	$a\mathbf{i}$	$a\mathbf{j}$	$\frac{1}{a}\mathbf{i}$	$\frac{1}{a}\mathbf{j}$
Triangular y hexagonal	$a\mathbf{i}$	$a\left(\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}\right)$	$\frac{1}{a}\left(\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j}\right)$	$\frac{1}{a}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\mathbf{j}\right)$

Tabla 3.1: Vectores base del *lattice* (\mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2) y sus recíprocos correspondientes (\mathbf{b}_1 y \mathbf{b}_2) en términos de la dimensión característica a para las configuraciones estudiadas.

En la figura 3.4 se muestra la PZB en el espacio de números de onda $k_1 - k_2$ para las configuraciones cuadrada (Fig. 3.4a) y triangular y hexagonal (Fig. 3.4b), además de la zona irreducible identificada mediante el triángulo ABC .

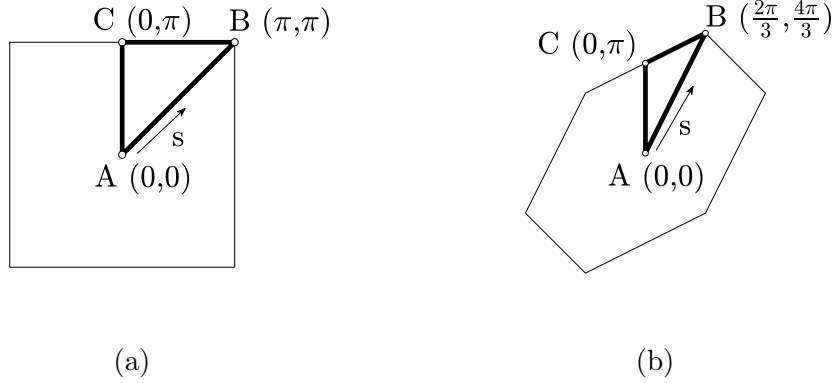


Figura 3.4: Primera Zona de Brillouin y zona irreducible en el espacio k_1 - k_2 : (a) Configuración cuadrada, (b) Configuración triangular y hexagonal.

A continuación se obtiene la ecuación de gobierno para el problema de vibraciones libres de la estructura *lattice* placa-viga.

Sean U , V y W los desplazamientos en dirección X , Y y Z , respectivamente, y θ_x , θ_y y θ_z las rotaciones alrededor de los ejes X , Y y Z , respectivamente. La placa tiene impedidos los desplazamientos en el plano y la rotación alrededor del eje perpendicular, por tanto, sus grados de libertad son W , θ_x y θ_y . Las vigas tienen impedidas la rotación alrededor de su eje longitudinal por lo que sus grados de libertad son U , V , W , θ_x y θ_y . La figura 3.5 muestra un esquema de la celda unitaria para la configuración cuadrada con los grados de libertad del sistema. Se considera que el espesor de la placa es pequeño en comparación con la longitud de la viga. También se considera que el radio de giro de la viga es mucho menor que su longitud. Estas hipótesis permiten utilizar el modelo de Kirchhoff para la placa y el modelo de Euler-Bernoulli para las vigas, considerando el efecto de deformación por cortadura despreciable.

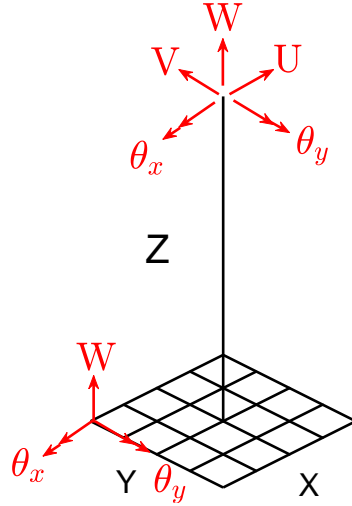


Figura 3.5: Esquema de la celda unitaria para la configuración cuadrada con los grados de libertad considerados.

Eremeyev et al. [31] formulan analíticamente el problema para el análisis de vibraciones libres de una placa con vigas, obteniendo la siguiente expresión

$$D\Delta^2 W - \rho\omega^2 W = \sum_i \left(\rho_* l \omega^2 W \delta(X - X_i) \delta(Y - Y_i) - \frac{C\Omega}{g(\Omega l)} \nabla \cdot [(\nabla W) \Big|_{X=X_i, Y=Y_i} \delta(X - X_i) \delta(Y - Y_i)] \right), \quad (3.1)$$

siendo

$$g(\Omega l) = \frac{1 + \cos(\Omega l) \cosh(\Omega l)}{\sin(\Omega l) \cosh(\Omega l) - \cos(\Omega l) \sinh(\Omega l)}, \quad \Omega = \sqrt[4]{\rho_*/C} \sqrt{\omega}, \quad (3.2)$$

ω la frecuencia propia de vibración, $\delta(\bullet)$ la función delta de Dirac y ∇ y Δ^2 el operador gradiente y el operador bilaplaciano en coordenadas cartesianas, respectivamente. La derivación de la ecuación (3.1) se encuentra en el Apéndice 7.3. La obtención de la relación de dispersión a partir de la ecuación (3.1) para cada una de las distribuciones no es trivial. De hecho, Eremeyev et al. [31] no abordan este problema desde el punto de vista de propagación de ondas en estructuras *lattice*. En su trabajo se considera una distribución densa de vigas que permite simplificar la ecuación (3.1) para obtener la relación de dispersión de forma analítica. Esta simplificación impide considerar

el efecto de escala producido por la distribución periódica de vigas en la relación de dispersión, siendo este uno de los objetivos del presente capítulo.

Ante la dificultad de obtener la relación de dispersión de forma analítica a partir de la ecuación (3.1) para una distribución determinada de vigas, se utilizará un modelo de celda para cada configuración y se formulará y resolverá mediante el MEF con ayuda del teorema de Bloch el correspondiente problema de autovalores asociado. Como se estudió en el capítulo anterior, este procedimiento permite obtener la relación de dispersión. Estos resultados integran el efecto de la distribución de las vigas sobre la placa. No obstante, la generalidad de la ecuación (3.1) para representar el comportamiento dinámico de la placa con una distribución arbitraria de vigas permite obtener los grupos de variables que realmente influyen en su comportamiento. Por ello, en la siguiente sección se realiza una adimensionalización de la ecuación (3.1) con el objetivo de obtener los grupos adimensionales de parámetros para, más adelante, estudiar su influencia en las relaciones de dispersión.

3.2. Forma adimensional de la ecuación de gobierno: Grupos adimensionales

La ecuación (3.1) ofrece una valiosa información ya que permite identificar los grupos de parámetros que gobiernan la dinámica del problema. Utilizando las siguientes variables espaciales adimensionales $\bar{W} = W/a$, $\bar{X} = X/a$ y $\bar{Y} = Y/a$, se pueden establecer las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{m+n}}{\partial X^m \partial Y^n} &= \frac{1}{a^{m+n}} \frac{\partial^m}{\bar{X}^m} \frac{\partial^n}{\bar{Y}^n}, \\ \delta(X) &= \delta(a\bar{X}) = \frac{1}{a} \delta(\bar{X}), \\ \delta(Y) &= \delta(a\bar{Y}) = \frac{1}{a} \delta(\bar{Y}).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Así, la ecuación (3.1) puede escribirse en forma adimensional, obteniéndose la siguiente expresión

$$\Delta^2 \bar{W} - A_1 A_2^4 A_3 \bar{\lambda}^4 \bar{W} = \sum_i \left(A_2^2 A_3 \bar{\lambda}^4 \bar{W} \delta(\bar{X} - \bar{X}_i) \delta(\bar{Y} - \bar{Y}_i) - \right. \quad (3.4)$$

$$\left. - \frac{A_3 \bar{\lambda}}{g(\bar{\lambda})} \nabla \cdot [(\nabla \bar{W}) \Big|_i \delta(\bar{X} - \bar{X}_i) \delta(\bar{Y} - \bar{Y}_i)] \right),$$

donde A_1 , A_2 y A_3 son grupos adimensionales de parámetros definidos como

$$A_1 = \frac{\rho}{\rho_* l}, \quad A_2 = \frac{a}{l}, \quad A_3 = \frac{C/l}{D} \quad (3.5)$$

y $\bar{\lambda}$ es el autovalor adimensional

$$\bar{\lambda} = \Omega l = \sqrt[4]{\frac{\rho_* l^4}{C}} \sqrt{\omega} \equiv \sqrt{\bar{\omega}}, \quad (3.6)$$

con $\bar{\omega}$ la frecuencia propia adimensional. Los grupos A_1 , A_2 y A_3 relacionan respectivamente las densidades de la placa y la viga, la longitud de la viga con la dimensión característica de la celda unitaria y las rigideces de la viga y de la placa. En definitiva, dada una determinada distribución de vigas, los autovalores quedan expresados en función de los grupos adimensionales como

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(A_1, A_2, A_3). \quad (3.7)$$

Los grupos adimensionales relativos a un fenómeno físico aportan información intrínseca sobre el problema. Si el valor de todos los grupos adimensionales se mantiene constante, los parámetros físicos del problema (longitud de la viga, espesor de la placa, ...) pueden ser modificados sin cambiar el comportamiento dinámico del sistema. En otras palabras, si dos estructuras *lattice* placa-viga, (1) y (2), con características distintas, $(\rho, \rho_*, l, a, C, D)^{(1)}$ y $(\rho, \rho_*, l, a, C, D)^{(2)}$, tienen los mismos valores para los grupos adimensionales A_1, A_2, A_3 ($A_1^{(1)} = A_1^{(2)}$, $A_2^{(1)} = A_2^{(2)}$, $A_3^{(1)} = A_3^{(2)}$), entonces $\bar{\lambda}^{(1)} = \bar{\lambda}^{(2)}$.

Estos grupos ofrecen información valiosa sobre las estructuras *lattice* placa-viga con el objetivo de analizar sus propiedades dispersivas así como de obtener información acerca de los *band gaps*. En las siguientes secciones, se realizará un análisis paramétrico estudiando las relaciones dispersivas en función de los grupos adimensionales obtenidos.

3.3. Análisis numérico

En esta sección se presenta el análisis del modelo de celda de las tres configuraciones para la obtención, mediante la aplicación del teorema de Bloch, de las frecuencias correspondientes a las relaciones de dispersión. Los modelos de celda representan el comportamiento dinámico de las celdas unitarias mostradas en las figuras 3.1b-3.3b. Esto permite un notable ahorro de coste computacional.

El problema de vibraciones libres de la celda unitaria de referencia se resuelve numéricamente mediante el MEF. Según las hipótesis del problema definido en la sección 3.1, las vigas se formulan según la teoría de Euler-Bernoulli y el substrato se formula como de acuerdo a la teoría de Kirchhoff.

Las vigas están discretizadas mediante elementos lineales de dos nodos. Para cada nodo se consideran cinco grados de libertad correspondientes a los tres desplazamientos (U, V y W) y dos giros (θ_x y θ_y). Esto se corresponde con diez gdl por elemento y se han utilizado ocho elementos. Las matrices de rigidez y de masa de este elemento se pueden obtener de [22].

La discretización de la placa se ha realizado con elementos distintos para las celdas unitarias de la configuración cuadrada y las configuraciones triangular y hexagonal. En la configuración cuadrada, debido su geometría (Fig. 3.6a) se ha optado por utilizar elementos cuadrados MZC (Melosh, Zienkiewicz y Cheung) [54] de cuatro nodos. Para cada nodo se consideran tres grados de libertad correspondientes a un desplazamiento (W) y dos giros (θ_x y θ_y). Esto se corresponde con doce grados de libertad por elemento y se han utilizado 256 elementos. Las matrices de rigidez y de masa de este elemento, así como las funciones de forma, se recogen en el Apéndice 7.3. En las configuraciones triangular y hexagonal, debido a la geometría rómbica común a ambas placas (Fig. 3.6b) se ha optado por utilizar elementos triangulares CKZ (Cheung, King y Zienkiewicz) [54] de tres nodos. Para cada nodo se consideran tres grados de libertad correspondientes a un desplazamiento (W) y dos giros (θ_x y θ_y). Esto se corresponde con nueve grados de libertad por elemento y se han utilizado 512 elementos. Las matrices de rigidez y de masa de este elemento, así como las funciones de forma, se recogen en el Apéndice 7.3.

A partir de las matrices de rigidez y de masa de los elementos que compo-

nen la malla y su posterior ensamblaje global, se puede formular el problema de vibraciones libres de la celda unitaria, considerada esta con bordes libres, como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

donde \mathbf{K} y \mathbf{M} son las matrices de rigidez y masa, respectivamente, y \mathbf{U} es el vector de desplazamientos nodales de la celda unitaria.

En la figura 3.6 se han identificado los nodos de contorno laterales (Q_B , Q_R , Q_T , Q_L) y en los vértices (Q_{RB} , Q_{RT} , Q_{LT} , Q_{LB}) de las celdas de las configuraciones cuadrada (Fig. 3.6a) y triangular y hexagonal (Fig. 3.6b), donde Q_I representa los nodos internos de la placa y todos los de la viga (dado que esta no presenta puntos en el contorno de la celda).

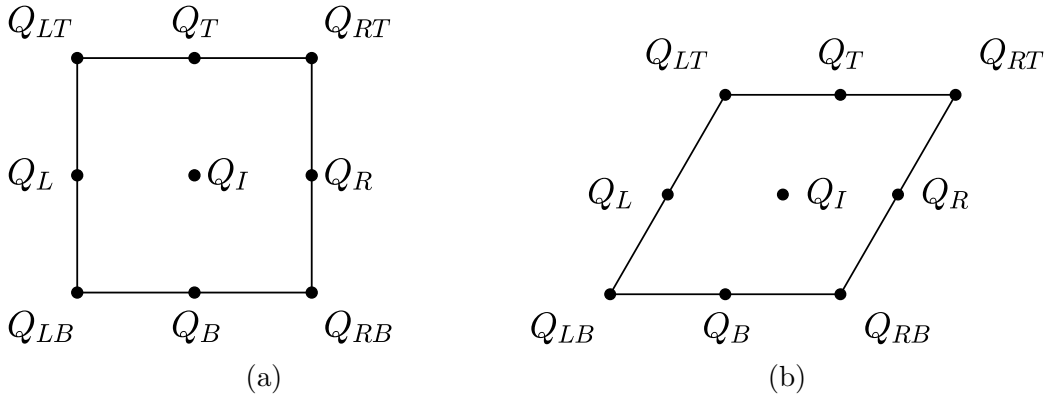


Figura 3.6: Celda unitaria con identificación de tipos de nodos en la placa: (a) Configuración cuadrada, (b) Configuración triangular y hexagonal.

Siguiendo la metodología propuesta a partir de la aplicación del teorema de Bloch, explicada en la sección 2.2.2, se establecen ahora las relaciones entre los desplazamientos de los nodos del contorno de la celda unitaria, permitiendo reducir el número de grados de libertad independientes

$$\mathbf{U} = \mathbf{W}\tilde{\mathbf{U}}. \quad (3.9)$$

con $\tilde{\mathbf{U}}$ vector de desplazamientos nodales reducido. A continuación, después de admitir una solución de onda plana, se sustituyen estas relaciones en la ecuación (3.8), obteniendo un problema de autovalores para el vector de onda

$[k_1, k_2]$

$$[\mathbf{K}_r(k_1, k_2) - \omega^2 \mathbf{M}_r(k_1, k_2)]\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{0}, \quad (3.10)$$

donde \mathbf{K}_r y \mathbf{M}_r son las respectivas matrices de rigidez y de masa reducidas. Finalmente, resolviendo la ecuación (3.10) para una muestra suficientemente amplia de valores del vector de onda $[k_1, k_2]$ pertenecientes a la PZB de cada una de las configuraciones (Fig. 3.4), se obtiene una representación por puntos de la relación de dispersión $\omega = \omega(k_1, k_2)$, y las correspondientes formas modales $\mathbf{U} = \mathbf{W}\tilde{\mathbf{U}}$.

3.4. Análisis de resultados

En esta sección se analizan las relaciones de dispersión de las tres configuraciones que se han obtenido aplicando la metodología presentada en la sección anterior. Se ha considerado que el material es acero y la sección transversal de la viga es circular. A partir de las propiedades mecánicas y geométricas recogidas en la tabla 3.2, se pueden determinar los valores de los parámetros de rigidez y densidad específica mediante las expresiones

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad C = EI, \quad \rho = \rho_{\text{vol}}t, \quad \rho_* = \rho_{\text{vol}}A, \quad (3.11)$$

con

$$I = \pi \frac{d^4}{64}, \quad A = \pi \frac{d^2}{4}. \quad (3.12)$$

Estos valores dan lugar a los siguientes valores de los grupos adimensionales, considerados de referencia, $A_1^* = 0.65$, $A_2^* = 0.5$ y $A_3^* = 823.69$.

3.4.1. Relaciones de dispersión

A continuación se presentan las relaciones de dispersión relativas a las tres configuraciones. Se mostrará la superficie de dispersión correspondiente al primer modo y las curvas de dispersión correspondientes a los primeros modos. Las curvas se han obtenido para los números de onda del perímetro de la zona irreducible de cada PZB, permitiendo identificar la posición y anchura de los diferentes *band gaps*.

Parámetro	Valor
Módulo de Young (E)	2.1e11 N/m ²
Coefficiente de Poisson (ν)	0.3
Densidad volumétrica (ρ_{vol})	7800 kg/m ³
Espesor de la placa (t)	0.005 m
Longitud característica de celda unitaria (a)	1 m
Longitud de la viga (l)	2 m
Diámetro de sección transversal de la viga (d)	0.14 m

Tabla 3.2: Propiedades mecánicas y geométricas de la estructura *lattice* placa-viga.

Configuración cuadrada

La configuración cuadrada está representada por el modelo de celda correspondiente a la celda unitaria mostrada en la figura 3.1b. La PZB asociada a esta configuración se corresponde con la representada en la figura 3.4a. Estos son los principales resultados asociados a esta configuración.

En la figura 3.7 se presenta la superficie de dispersión del primer modo mediante un diagrama de iso-frecuencias en el espacio $k_1 - k_2$. Se ha superpuesto en la figura el perímetro de la PZB y la zona irreducible correspondiente. Se pueden observar cuatro planos de simetría correspondientes a los cuatro planos de simetría geométricos de la configuración cuadrada. En el diagrama de iso-frecuencias, las curvas circulares indican para esas frecuencias un comportamiento isótropo del *lattice*, es decir, la propagación de la onda se produce a la misma velocidad en todas las direcciones. Este efecto puede apreciarse claramente para frecuencias asociadas a bajos números de onda (alrededor del punto A). Cuando el número de onda se aproxima al contorno de la zona de Brillouin, las curvas de iso-frecuencia se deforman. Esto indica que, para estas frecuencias, el *lattice* se comporta de forma anisótropa y la propagación de las ondas puede tener direcciones preferentes de propagación. Para estos

números de onda las curvas de iso-frecuencia adoptan una forma próxima a la de un cuadrado y la propagación de las ondas se produce en las direcciones normales a los lados del cuadrado (dirección paralela y perpendicular a AB), como se mostrará posteriormente en el estudio de las velocidades de propagación.

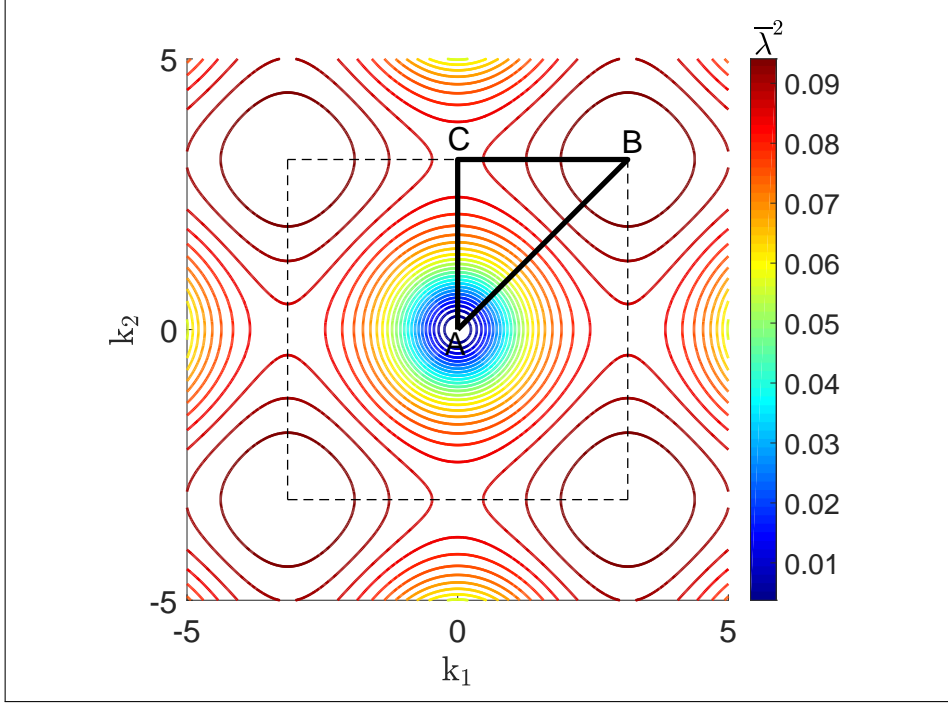
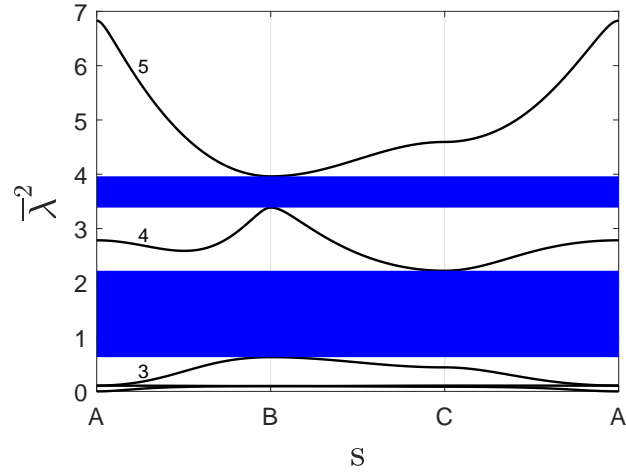


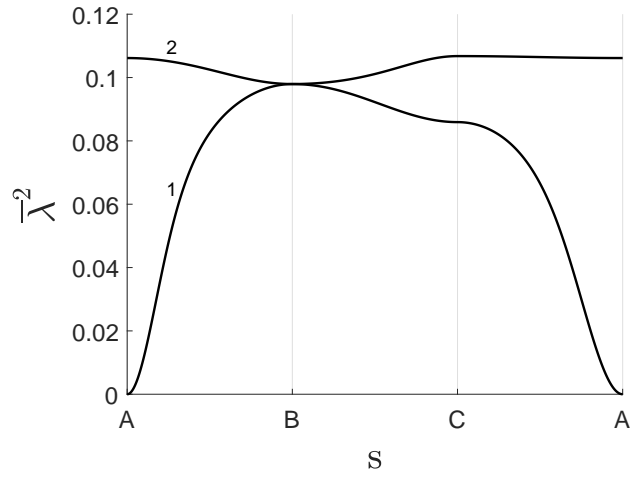
Figura 3.7: Configuración cuadrada: Superficie de dispersión del modo 1 en diagrama de iso-frecuencias, PZB y zona irreducible.

Las curvas de dispersión y la estructura de bandas de la configuración cuadrada se presentan en la figura 3.8a a lo largo del perímetro de la zona irreducible, que se corresponde con el triángulo ABC representado en la figura 3.4a. El detalle de los dos primeros modos se presenta en la figura 3.8b. En el eje vertical de la figura 3.8a se muestra la frecuencia propia adimensional $\bar{\lambda}^2$, ecuación (3.6). En el eje horizontal, s representa la distancia recorrida a lo largo del perímetro de la zona irreducible, partiendo desde el punto A ($k_1 = 0$, $k_2 = 0$). La figura 3.8a muestra cómo la configuración cuadrada presenta dos *band gaps*, uno entre los modos 3 y 4 y otro entre los modos 4 y 5. Además, en la tabla 3.3 se presentan las formas modales

asociadas a los cinco primeros modos en los puntos A, B y C de la PZB. Como se puede observar, la curva de dispersión correspondiente al primer modo parte de $\bar{\lambda}^2 = 0$ en A y representa un desplazamiento de traslación como sólido rígido de la celda unitaria en dirección Z.



(a)



(b)

Figura 3.8: Configuración cuadrada: (a) Curvas de dispersión y estructura de bandas: modos 1 a 5, (b) Detalle de curvas de dispersión y estructura de bandas: modos 1 y 2.

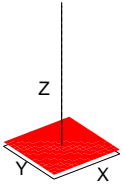
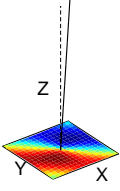
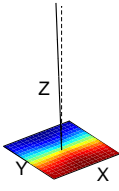
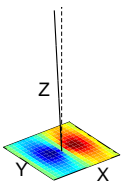
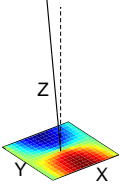
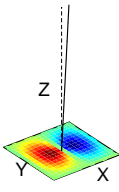
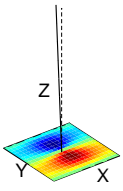
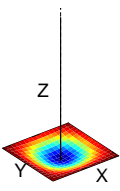
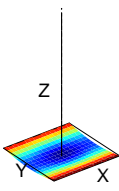
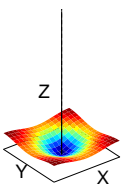
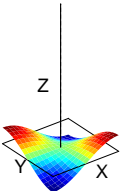
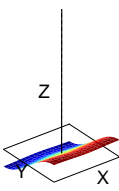
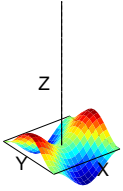
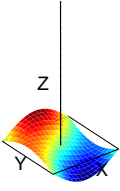
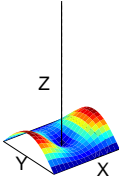
Modo	A	B	C
1			
2			
3			
BAND GAP			
4			
BAND GAP			
5			

Tabla 3.3: Configuración cuadrada: Representación de las formas de los modos 1 a 5 para los vértices de la zona irreducible.

Como se puede observar en la tabla 3.3, las formas modales de la celda unitaria sugieren la existencia de dos mecanismos:

- Mecanismo 1, asociado a la traslación axial sin flexión de la viga.
- Mecanismo 2, asociado a la flexión de la viga sin traslación axial.

Por ejemplo, para el modo 3 y puntos B y C, y para el modo 4 y punto A, la placa se deforma induciendo un desplazamiento vertical de la viga como sólido rígido, no existiendo flexión en esta. Sin embargo, para el modo 2 y punto B, y para el modo 3 y punto A, el movimiento de la placa origina flexión en la viga sin desplazamiento axial de esta. Aunque resulte inapreciable en la tabla 3.3, se ha comprobado que las formas modales del modo 4 y punto C, y modo 5 y punto B corresponden al segundo mecanismo, produciéndose flexión en la viga.

Con el objetivo de verificar numéricamente y de manera sistemática la presencia de dichos mecanismos, se han estudiado dos problemas, cada uno de ellos asociado a los efectos que se han descrito. Estos problemas son:

- Problema Tipo 1 (asociado al mecanismo 1), cuya solución se obtiene imponiendo en el modelo de elementos finitos del problema completo, una condición de contorno adicional consistente en impedir los desplazamientos transversales de la viga. Este modelo captura el efecto de la inercia de la viga en dirección fuera del plano, como elemento inextensible.
- Problema Tipo 2 (asociado al mecanismo 2), cuya solución se imponiendo en el modelo de elementos finitos del problema completo una condición de contorno adicional que consiste en impedir los desplazamientos axiales de la viga. Este modelo captura el efecto de la vibración transversal de la viga en direcciones X e Y.

A continuación se han obtenido las curvas de dispersión asociadas a la zona irreducible de la PZB de cada problema tipo. En las tablas 3.4 y 3.5 se recogen los valores de la frecuencia adimensional correspondientes a los vértices de la zona irreducible, obtenidas en la resolución de los problemas Tipo 1 y Tipo 2, respectivamente. Adicionalmente, en la tabla 3.6 se recogen los valores correspondientes al problema completo. En las tablas 3.4 y 3.5 se ha

sombreado, en verde y rojo, aquellos casos en los que aparece un valor de alguna frecuencia de vibración del problema Tipo 1 (verde) o del problema Tipo 2 (rojo) que también está presente en el caso completo. Por ejemplo, la frecuencia del modo 2 y punto A del problema Tipo 1 coincide con la correspondiente al problema completo en el modo 4 y punto A y, por tanto, se ha sombreado en verde. Sin embargo, la frecuencia del modo 1 y punto B del problema Tipo 2 coincide con la correspondiente al problema completo en el modo 1 y punto B, sombreado esta en rojo. En esta tabla se han sombreado en azul aquellas casos cuyas frecuencias se pueden encontrar tanto en el modelo completo, como en ambos problemas estudiados.

Modo	A	B	C
1	0	0.63	0.45
2	2.92	3.4	1.65
3	6.82	3.4	4.6
4	7.76	3.4	7.65
5	7.76	14.4	8.77

Tabla 3.4: Configuración cuadrada: Frecuencias adimensionales para el problema Tipo 1 para los vértices de la zona irreducible.

Modo	A	B	C
1	0.095	0.1	0.086
2	0.105	0.1	0.105
3	0.105	3.4	1.75
4	6.82	3.4	2.2
5	6.82	3.95	7.65

Tabla 3.5: Configuración cuadrada: Frecuencias adimensionales para el problema Tipo 2 para los vértices de la zona irreducible.

Modo	A	B	C
1	0	0.1	0.086
2	0.105	0.1	0.105
3	0.105	0.63	0.45
4	2.92	3.4	2.2
5	6.82	3.95	4.6

Tabla 3.6: Configuración cuadrada: Frecuencias adimensionales para el problema completo para los vértices de la zona irreducible.

Este procedimiento ha permitido identificar los mecanismos 1 y 2 en el comportamiento del sistema completo. Para ciertos modos y vértices de la zona irreducible, las frecuencias (y formas modales) del sistema completo aparecen asociados a ambos mecanismos.

La identificación del mecanismo presente en cada punto de la zona irreducible permite conocer de forma general qué parámetros variar para modificar las curvas de dispersión. Para modificar los autovalores asociados al problema Tipo 1 sería necesario variar los parámetros relativos a la masa de la viga, mientras que para los del problema Tipo 2 habría que variar los parámetros asociados a la rigidez a flexión de la viga. La tabla 3.7 muestra el tipo de problema presente para los modos 1 a 5 en los puntos A, B y C de la PZB. Se ha identificado como ‘Común’ aquellos casos pertenecientes a ambos tipos.

Modo	A	B	C
1	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 2
2	Tipo 2	Tipo 2	Tipo 2
3	Tipo 2	Tipo 1	Tipo 1
BAND GAP			
4	Tipo 1	Común	Tipo 2
BAND GAP			
5	Común	Tipo 2	Tipo 1

Tabla 3.7: Configuración cuadrada: Resumen del problema tipo presente en los modos 1 a 5 para los vértices de la zona irreducible.

Configuración triangular

La configuración triangular está representada por el modelo de celda correspondiente a la celda unitaria mostrada en la figura 3.2b. La PZB asociada a esta configuración se corresponde con la representada en la figura 3.4b. Estos son los principales resultados asociados a esta configuración.

La superficie de dispersión del primer modo, mostrada en la figura 3.9, presenta curvas de iso-frecuencia elípticas en el espacio $k_1 - k_2$ (circulares en el espacio $k_x - k_y$) para números de onda reducidos, que se corresponden con bajas frecuencias. A estas frecuencias, la propagación de la onda es isotrópica. A diferencia de la configuración cuadrada, las curvas de iso-frecuencia adoptan una forma próxima a la de un hexágono cuando aumenta el número de onda. En el perímetro de PZB, las superficies de dispersión son prácticamente planas, como indica la baja densidad de iso-líneas.

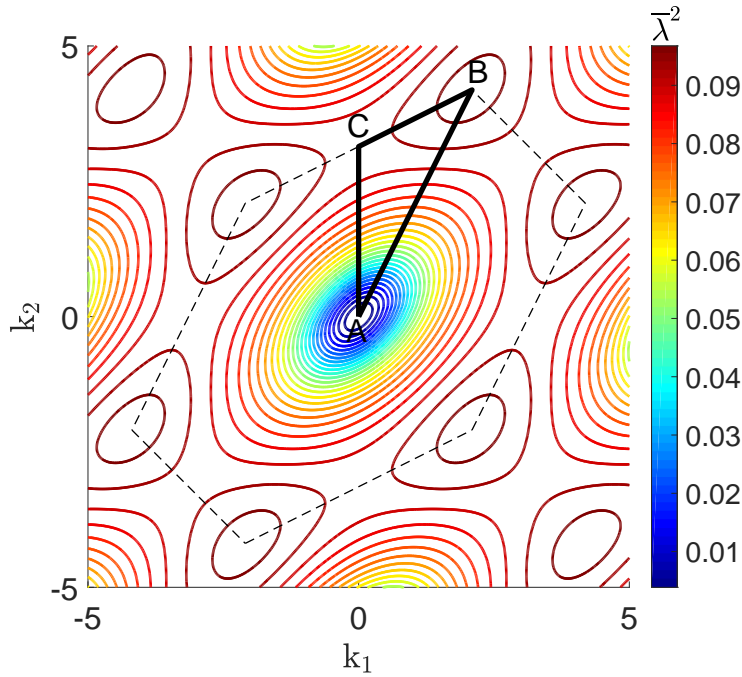
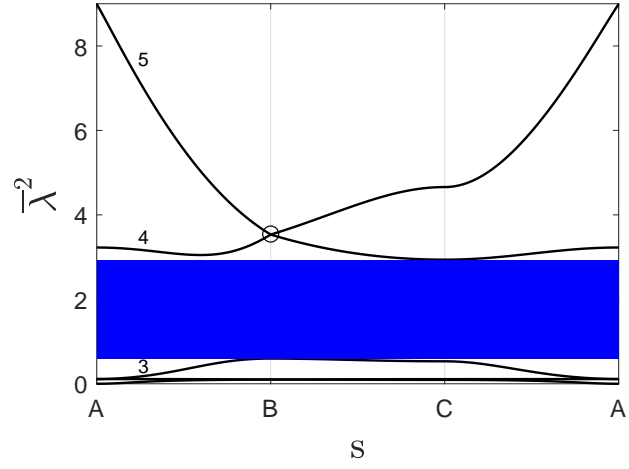


Figura 3.9: Configuración triangular: Superficie de dispersión del modo 1 en diagrama de iso-frecuencias, PZB y zona irreducible.

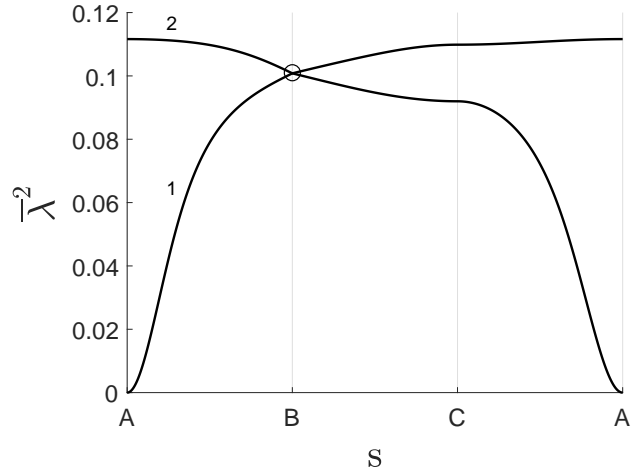
Las curvas de dispersión y la estructura de bandas se presentan en la fi-

gura 3.10a a lo largo del perímetro de la zona irreducible, que se corresponde al triángulo ABC dibujado en la figura 3.4b. El detalle de los dos primeros modos se muestra en la figura 3.10b. Como se puede observar en la figura 3.10a, el cambio de una distribución de vigas cuadrada a una triangular modifica la estructura de bandas y ahora el *lattice* presenta un único *band gap* (entre los modos 3 y 4) pero más ancho que en el caso de la distribución cuadrada. La primera y segunda curva de dispersión coinciden en el punto B (Fig. 3.10b). Las superficies alrededor de esta frecuencia tienen forma de cono y a esta característica se denomina *cono de Dirac*. Aparece también otro cono de Dirac entre el cuarto y quinto modo (Fig. 3.10a). La existencia de conos de Dirac es una característica inherente a la existencia de seis planos de simetría en la estructura *lattice* [55].

La existencia de dos mecanismos de vibración también es evidente a partir de la observación de las formas modales. En la tabla 3.8 se muestran estas formas asociadas a los cinco primeros modos en los puntos A, B y C de la PZB. Se ha realizado el mismo análisis que el de la configuración cuadrada, recogiendo en la tabla 3.9 el tipo de problema presente para cada modo y vértice de la zona irreducible. El problema Tipo 1 hace referencia a la vibración fuera del plano mientras que el problema Tipo 2 hace referencia a la vibración transversal al eje de la viga. Como en el caso de la configuración cuadrada, se puede observar que el problema del Tipo 2 está presente en los dos primeros modos.



(a)



(b)

Figura 3.10: Configuración triangular: (a) Curvas de dispersión y estructura de bandas: modos 1 a 5, (b) Detalle de curvas de dispersión y estructura de bandas: modos 1 y 2.

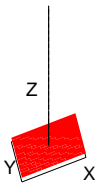
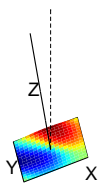
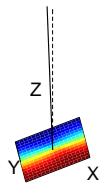
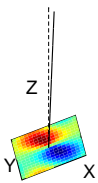
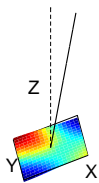
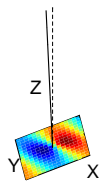
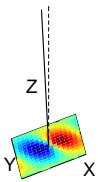
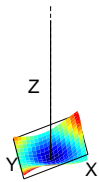
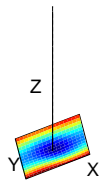
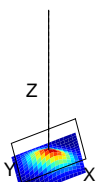
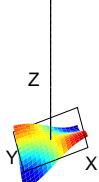
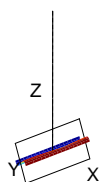
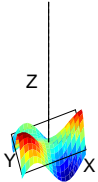
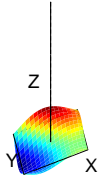
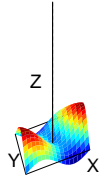
Modo	A	B	C
1			
2			
3			
BAND GAP			
4			
5			

Tabla 3.8: Configuración triangular: Formas de los modos 1 a 5 para los vértices de la zona irreducible.

Modo	A	B	C
1	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 2
2	Tipo 2	Tipo 2	Tipo 2
3	Tipo 2	Tipo 1	Tipo 1
BAND GAP			
4	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 2
5	Común	Tipo 2	Tipo 1

Tabla 3.9: Configuración triangular: Resumen del problema tipo presente en los modos 1 a 5 para los vértices de la zona irreducible.

Configuración hexagonal

La configuración hexagonal está representada por el modelo de celda correspondiente a la celda unitaria mostrada en la figura 3.3b. La PZB asociada a esta configuración se corresponde con la representada en la figura 3.4b. Estos son los principales resultados asociados a esta configuración.

La superficie de dispersión del primer modo se representa en la figura 3.11. Como la configuración triangular, la hexagonal presenta propagación de ondas isotropa en el régimen de bajos números de onda. En el perímetro de la PZB, las superficies de dispersión son prácticamente planas como indica la baja densidad de iso-líneas.

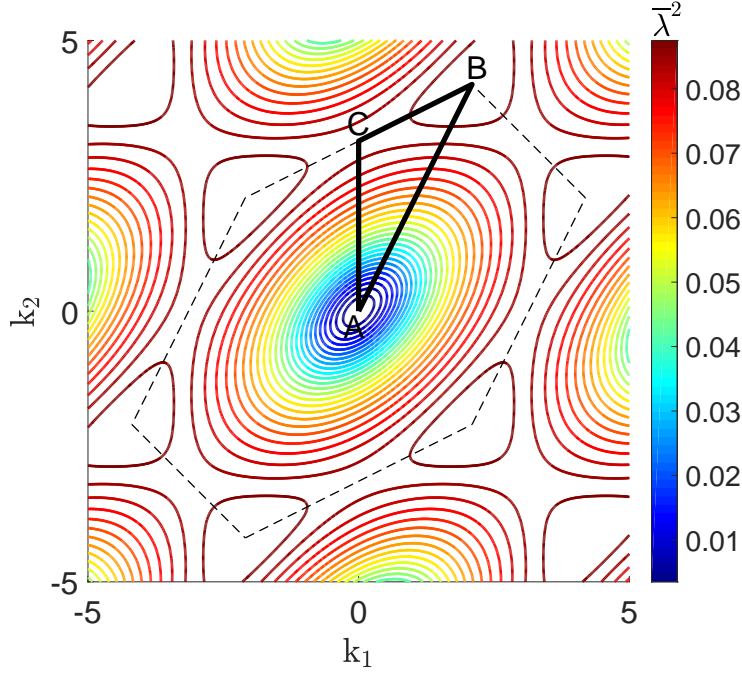


Figura 3.11: Configuración Hexagonal: Superficie de dispersión del modo 1 en diagrama de iso-frecuencias, PZB y zona irreducible.

Las curvas de dispersión y la estructura de bandas se muestran en la figura 3.12a a lo largo del perímetro de la zona irreducible, que se corresponde al triángulo ABC dibujado en la figura 3.4b. El detalle de los cuatro primeros modos está representado en la figura 3.12b. También aparecen diferencias en las características dispersivas entre las configuraciones cuadrada y triangular con la configuración hexagonal. En la figura 3.12a se aprecia como la configuración hexagonal presenta dos *band gaps* en el régimen de baja frecuencia (entre los modos 1 y 2 y entre los modos 3 y 4) y tres más anchos en el régimen de alta frecuencia (modos 6-7, 7-8 y 9-10). Al igual que en la configuración triangular, la hexagonal muestra un cono de Dirac entre los modos 5 y 6 (Fig. 3.12a).

La existencia de dos mecanismos de vibración también es evidente a partir del análisis de las formas modales, incluso para esta configuración que dispone de dos vigas en cada celda unitaria. En las tablas 3.10 y 3.11 se muestran las formas modales asociadas a los diez primeros modos en los puntos A, B

y C de la PZB. Se ha realizado el mismo análisis que el de la configuración cuadrada, recogiendo en la tabla 3.12 el tipo de problema presente para cada modo y vértice de la zona irreducible. Se han identificado modos equivalentes del problema completo en los problemas Tipo 1 y Tipo 2. Sin embargo, a diferencia de las configuraciones anteriores, esta no ha sido siempre posible para determinados modos. Estos caso se han señalado en la tabla 3.12 como “No presente”.

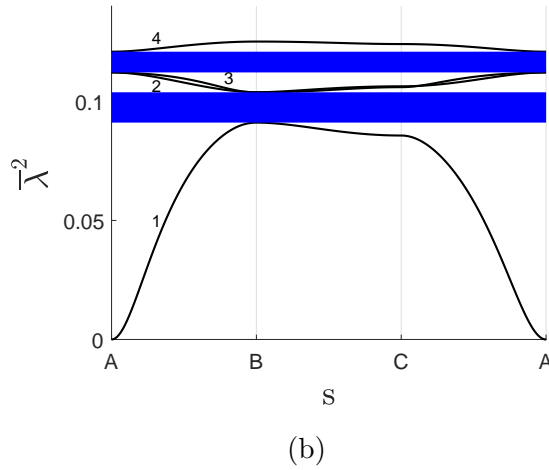
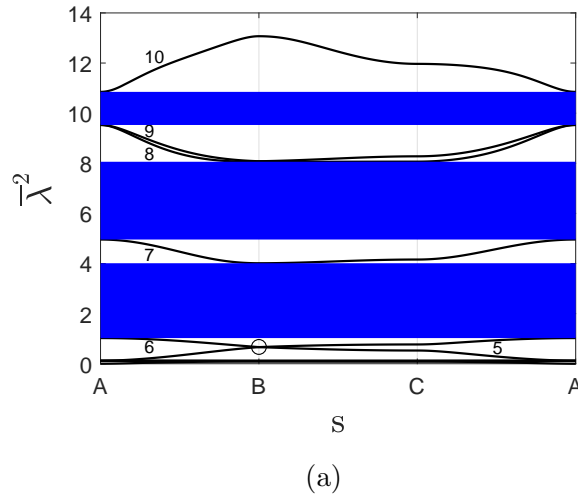


Figura 3.12: Configuración hexagonal: (a) Curvas de dispersión y estructura de bandas: modos 1 a 10, (b) Detalle de curvas de dispersión y estructura de bandas: modos 1 a 4.

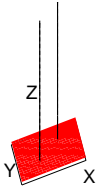
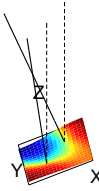
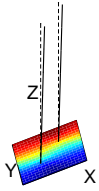
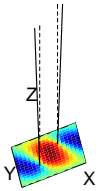
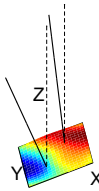
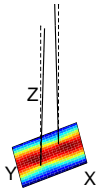
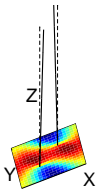
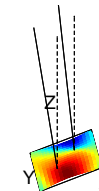
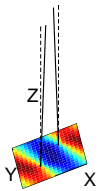
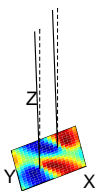
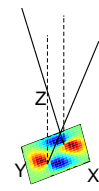
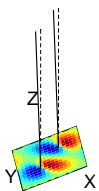
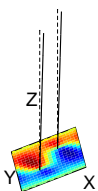
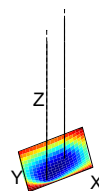
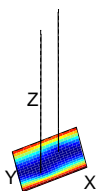
Modo	A	B	C
1			
BAND GAP			
2			
3			
BAND GAP			
4			
5			

Tabla 3.10: Configuración hexagonal: Formas de los modos 1 a 5 para los vértices de la zona irreducible para los vértices de la zona irreducible.

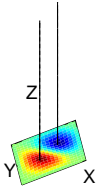
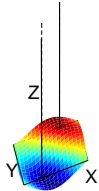
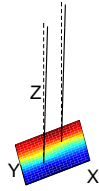
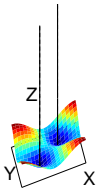
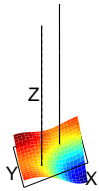
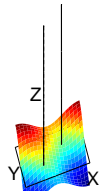
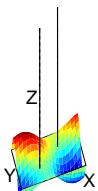
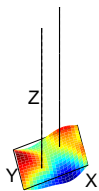
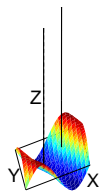
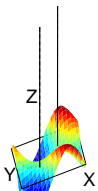
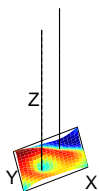
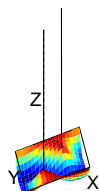
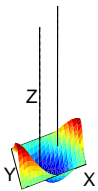
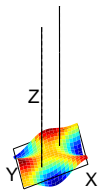
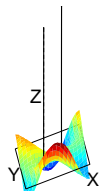
Modo	A	B	C
6			
BAND GAP			
7			
BAND GAP			
8			
9			
BAND GAP			
10			

Tabla 3.11: Configuración hexagonal: Formas de los modos 6 a 10 para los vértices de la zona irreducible para los vértices de la zona irreducible.

Modo	A	B	C
1	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 2
BAND GAP			
2	Tipo 2	Tipo 2	Tipo 2
3	Tipo 2	Tipo 2	Tipo 2
BAND GAP			
4	Tipo 2	Tipo 2	Tipo 2
5	Tipo 2	No presente	No presente
6	Tipo 1	No presente	No presente
BAND GAP			
7	Tipo 1	Tipo 2	No presente
BAND GAP			
8	Tipo 2	No presente	Tipo 2
9	Tipo 2	No presente	No presente
BAND GAP			
10	Tipo 2	Tipo 2	No presente

Tabla 3.12: Configuración hexagonal: Resumen del problema tipo presente en los modos 1 a 10 para los vértices de la zona irreducible.

3.4.2. Velocidades de fase y de grupo

Las curvas de dispersión y la estructura de bandas ofrecen una representación clara de las propiedades dispersivas y *band gaps* de la estructura *lattice*. Complementariamente a estos resultados, el análisis de las velocidades de fase y de grupo permite distinguir fácilmente los valores de frecuencia para los que se obtiene comportamiento isótropo o anisótropo en la propagación de las ondas. Ambos diagramas ofrecen información cualitativa de las capacidades de aislamiento o direccionalidad en la propagación de las ondas [56].

Las relaciones de dispersión se han obtenido para vectores de onda expresados en el espacio $k_1 - k_2$. Con el propósito de expresar las velocidades en coordenadas $\{X, Y\}$, las velocidades de fase y de grupo quedan definidas

como

$$\mathbf{v}_{\text{fase}} = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|^2} \mathbf{k}, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{v}_{\text{grupo}} = \mathbf{R} \cdot \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial k_1}, \frac{\partial \omega}{\partial k_2} \right\}^T, \quad (3.14)$$

con

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{i} & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{i} \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{j} & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{j} \end{pmatrix}.$$

Las relaciones de dispersión se han obtenido para un número elevado de vectores de onda. En consecuencia, la obtención de las velocidades se ha realizado numéricamente. En primer lugar, para un determinado valor de frecuencia ω^* se han obtenido la pareja de números de onda (k_1^*, k_2^*) correspondientes a la curva de iso-frecuencia de valor ω^* . A continuación, la velocidad de fase para cada punto (k_1^*, k_2^*, ω^*) se obtiene según la expresión (3.13). Finalmente, la velocidad de grupo para cada punto (k_1^*, k_2^*, ω^*) se ha obtenido mediante diferencias finitas, realizando después el cambio de ejes de coordenadas mediante \mathbf{R} .

Las velocidades de fase y de grupo de las tres configuraciones se muestran en las figuras 3.13-3.15. Estos resultados se corresponden al primer modo de vibración de cada configuración, para diferentes valores de frecuencia $\omega = c \cdot \omega_{\text{max}}$, siendo ω_{max} el valor de frecuencia máximo del primer modo y c toma valores reales tal que $c \leq 1$. Cada punto de los gráficas de velocidad indica una dirección de propagación de la onda.

La forma circular de las curvas de velocidad para baja frecuencia que se obtienen en las tres configuraciones, indica que la estructura *lattice* se comporta como sólido isótropo a bajas frecuencias, es decir, la onda se propaga a la misma velocidad en todas las direcciones del *lattice*, como lo anticipaba la forma circular de las curvas de iso-frecuencia para bajos números de onda. Cuando la frecuencia aumenta, la anisotropía se pone de manifiesto con la dependencia angular de la velocidad de propagación. Por ejemplo, en la figura 3.13b, referente a la configuración cuadrada, se puede observar cómo para la frecuencia $\omega = 0.88\omega_{\text{max}}$, la curva de velocidad se agrupa en dos direcciones correspondientes a una orientación de $\pm 45^\circ$ con la horizontal. Esto indica que, para ese valor de frecuencia, la onda se propaga en el plano $\{X, Y\}$ según dos direcciones que forman ángulos de $\pm 45^\circ$ con el eje X. En la figura 3.15b,

referente a la configuración hexagonal, se observa cómo para la frecuencia $\omega = 0.85\omega_{\max}$, la curva de velocidad se agrupa en tres direcciones correspondientes a una orientación de 0° y $\pm 60^\circ$ con la horizontal. Esto indica que, para ese valor de frecuencia, la onda se propaga en el plano $\{X,Y\}$ según tres direcciones que forman ángulos de 0° y $\pm 60^\circ$ con el eje X.

En los gráficos de velocidad de las tres configuraciones se pueden identificar los planos de simetría de la estructura *lattice* correspondiente. En las figuras se identifican cuatro planos de simetría en la configuración cuadrada (Fig. 3.13) o seis planos de simetría para las configuraciones triangular y hexagonal (Figs. 3.14 y 3.15). Además, se puede observar una característica propia de los sólidos anisótropos conocida como *cáusticas* [57], que se manifiesta como un bucle en los diagramas de velocidad de grupo para una frecuencia determinada. Las cáusticas están relacionadas con flujos de energía focalizados en paquetes de ondas propagándose a diferentes velocidades en una determinada dirección [56]. Estos bucles aparecen en la configuración cuadrada para $\omega = 0.88\omega_{\max}$ (Fig. 3.13b), en la configuración triangular para $\omega = 0.85\omega_{\max}$ (Fig. 3.14b) y en la configuración hexagonal para $\omega = 0.95\omega_{\max}$ (Fig. 3.15b).

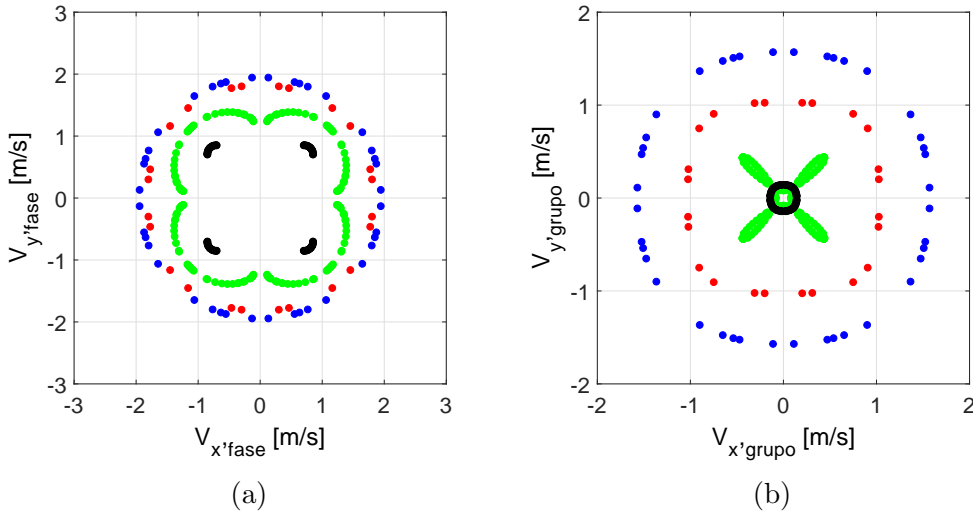


Figura 3.13: Configuración cuadrada: (a) Velocidad de fase, (b) Velocidad de grupo del primer modo para varias frecuencias: ‘●’ $\omega = 0.65\omega_{\max}$, ‘●’ $\omega = 0.75\omega_{\max}$, ‘●’ $\omega = 0.88\omega_{\max}$, ‘●’ $\omega = 0.99\omega_{\max}$.

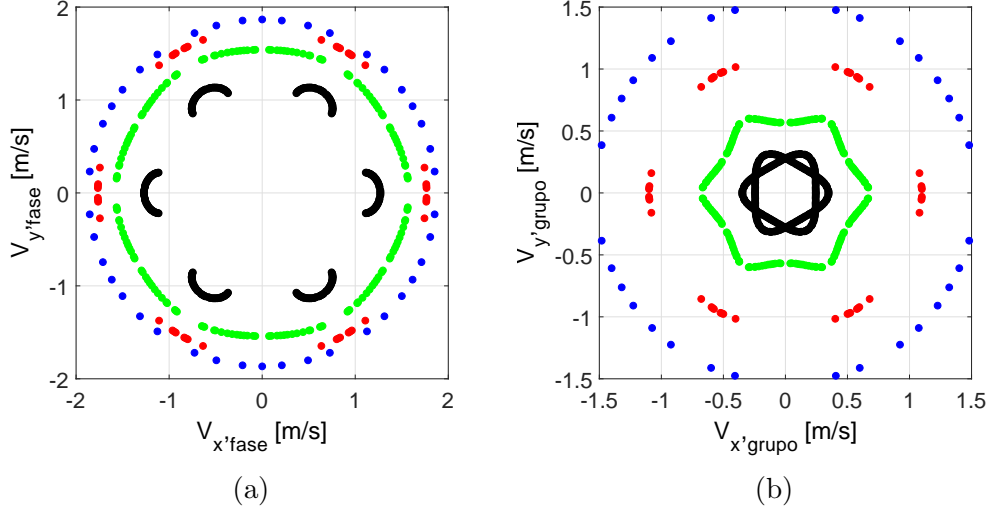


Figura 3.14: Configuración triangular: (a) Velocidad de fase, (b) Velocidad de grupo del primer modo para varias frecuencias: ‘●’ $\omega = 0.65\omega_{max}$, ‘●’ $\omega = 0.75\omega_{max}$, ‘●’ $\omega = 0.85\omega_{max}$, ‘●’ $\omega = 0.95\omega_{max}$.

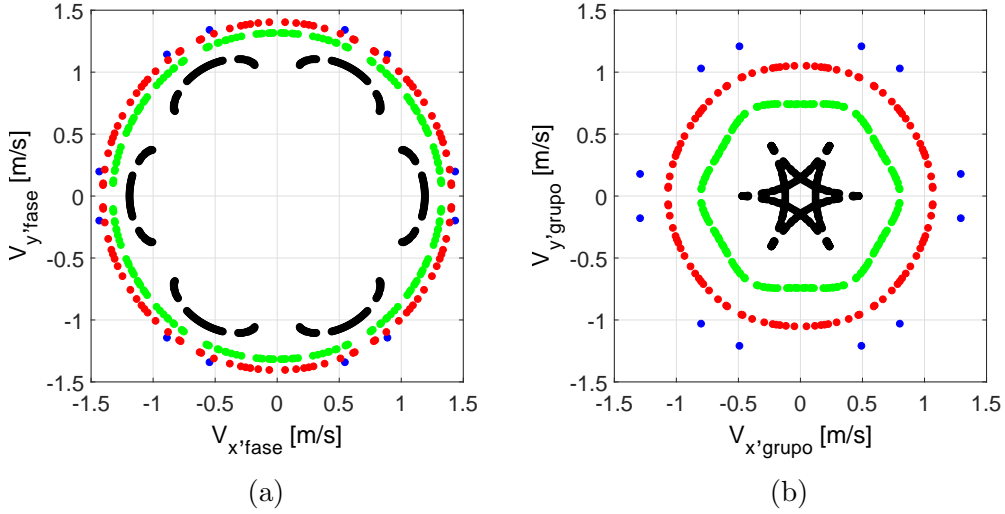


Figura 3.15: Configuración hexagonal: (a) Velocidad de fase, (b) Velocidad de grupo del primer modo para varias frecuencias: ‘●’ $\omega = 0.65\omega_{max}$, ‘●’ $\omega = 0.75\omega_{max}$, ‘●’ $\omega = 0.85\omega_{max}$, ‘●’ $\omega = 0.95\omega_{max}$.

Con estos resultados concluye el análisis realizado para los valores de parámetros definidos en la tabla 3.2. Si bien estos resultados son específicos a los valores de parámetros elegidos, este análisis ha permitido destacar las principales características de la propagación de ondas en estas estructuras, así como evidenciar la existencia de *band gaps*. En la literatura es común estudiar cómo varía la estructura de bandas cuando se modifica el valor de un único parámetro manteniendo el resto de valores constante. Este estudio correspondiente a valores específicos no permite analizar la influencia de los parámetros de forma global. Por ello se va a estudiar a continuación cómo cambia la estructura de bandas cuando se modifica la relación entre longitudes características, densidades y rigideces de la viga y la placa. Estas relaciones se corresponden con los grupos adimensionales obtenidos en la sección 3.2.

3.5. Influencia de los grupos adimensionales en la estructura de bandas

En esta sección se analiza la evolución de la estructura de bandas con los grupos adimensionales de parámetros, con el objetivo de determinar cuál es más determinante para definir la posición y la anchura de los *band gaps*, además de cómo modificar estos variando los valores de los parámetros físicos del problema.

Se ha analizado la evolución del valor medio y de la anchura del *band gap* correspondiente, en cada configuración, al de frecuencias más bajas, para diferentes valores de los grupos adimensionales. Si este *band gap* se encuentra entre los modos i y $i + 1$, se calculan el valor medio y la anchura según las expresiones

$$\bar{\lambda}_{\text{medio}}^2 = \frac{\omega_{i+1}^{\min} + \omega_i^{\max}}{2\omega_0}, \quad \bar{\lambda}_{\text{anchura}}^2 = \frac{\omega_{i+1}^{\min} - \omega_i^{\max}}{\omega_0}, \quad (3.15)$$

donde ω_{i+1}^{\min} y ω_i^{\max} son la mínima y máxima frecuencia correspondiente al modo $i + 1$ e i , respectivamente, y $\omega_0 = \sqrt{C/\rho_* l^4}$.

La evolución del *band gap* se muestra en las figuras 3.16 a 3.18 para los

valores de grupos adimensionales pertenecientes a los siguientes intervalos

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\rho}{\rho_*/l} \in [0.45, 0.85] \\ A_2 &= \frac{a}{l} \in (0, 3] \\ A_3 &= \frac{C/l}{D} \in [673, 973], \end{aligned}$$

que incluyen los valores de referencia A_1^* , A_2^* y A_3^* utilizados en las secciones anteriores. El estudio se ha limitado a los intervalos de los grupos que permitieran conocer la tendencia del *band gap* alrededor de los valores de referencia.

Como se puede observar en las figuras 3.16-3.18, la influencia de los grupos adimensionales es similar en las tres configuraciones, siendo A_2 el grupo adimensional más relevante en términos de la posición y anchura del *band gap*. El valor medio crece monótonamente cuando A_2 decrece. Aunque A_2 permite fácilmente posicionar el *band gap* a la frecuencia requerida, cuando éste tiende a cero, la anchura del *band gap* está influenciada por A_3 (Fig. 3.16b).

También se puede observar que la anchura tiende a cero cuando $A_2 \rightarrow 0$ o $1/A_2 \rightarrow 0$. Entre estos dos límites, la anchura del *band gap* alcanza un máximo que puede ser aprovechado a efectos de diseño. Estos resultados reflejan que para $a \ll l$ ($A_2 \rightarrow 0$) y $a \gg l$ ($1/A_2 \rightarrow 0$) la estructura *lattice* no presenta *band gaps*. El primer caso se corresponde al de una distribución continua de las vigas sobre la placa, convirtiéndose en una estructura *lattice* densa. Cabe destacar que cuando $A_2 \rightarrow 0$, la ecuación (3.4) conduce a una relación de dispersión sin *band gaps*, como recogieron Eremeyev *et al.* [31]. El segundo caso se corresponde a una situación en la que las vigas se encuentran suficientemente dispersas por la superficie de la placa y su efecto puede despreciarse. El sólido sería análogo a una placa sin vigas, que no presenta *band gaps*. Esta afirmación se puede verificar mediante la comparación de las relaciones de dispersión de la placa de Kirchhoff sin vigas y del *lattice* placa-viga para valores crecientes de A_2 , observando cómo las relaciones se aproximan para valores de A_2 cada vez más elevados. La ecuación de gobierno de la placa de Kirchhoff es

$$D\Delta^2 W + \rho \ddot{W} = 0. \quad (3.16)$$

Si se impone una solución de onda plana

$$W(X, Y, t) = A_0 e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \quad (3.17)$$

se obtiene la relación de dispersión

$$\omega(k_x, k_y) = \sqrt{\frac{D}{\rho} (k_x^4 + 2k_x^2 k_y^2 + k_y^4)}. \quad (3.18)$$

A continuación, para la placa con vigas (configuración cuadrada), se obtiene la primera curva de dispersión en el perímetro de la zona irreducible, figura 3.4a, para valores decrecientes de l manteniendo constante a . Como puede observarse en la figura 3.19, la curva de dispersión del *lattice* placa-viga converge hacia la correspondiente de la placa de Kirchhoff para valores crecientes de A_2 . Cabe destacar que se obtienen los mismos resultados para cualquiera de las otras configuraciones.

Conviene resaltar que, en comparación con trabajos de otros autores donde la evolución del *band gap* se estudia para un único parámetro físico, en esta sección se ha desarrollado un análisis alternativo más completo. Se han analizado el valor medio y la anchura de un *band gap* para diferentes valores de los grupos adimensionales (A_1 , A_2 , A_3). Las figuras 3.16-3.18 muestran la evolución de las características del *band gap* según los grupos adimensionales. En particular, ante el interés práctico de diseñar un *lattice* que presente un *band gap* a una frecuencia determinada y de anchura específica, se puede obtener del análisis la terna de valores de A_1 , A_2 y A_3 que satisfaga el requerimiento de diseño. Finalmente, conviene señalar que esta terna puede ser determinada mediante una combinación no única de los parámetros mecánicos y geométricos del problema.

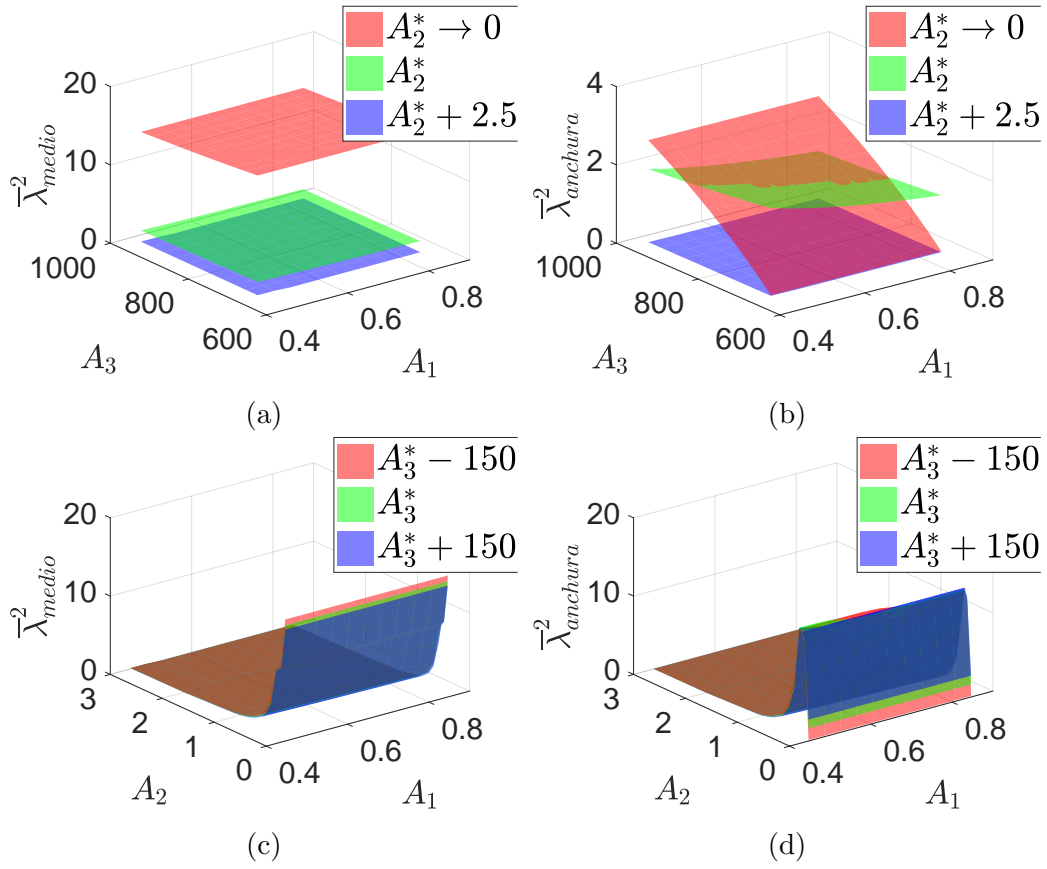


Figura 3.16: Configuración cuadrada: Influencia de los grupos adimensionales en el valor medio y anchura del primer *band gap*.

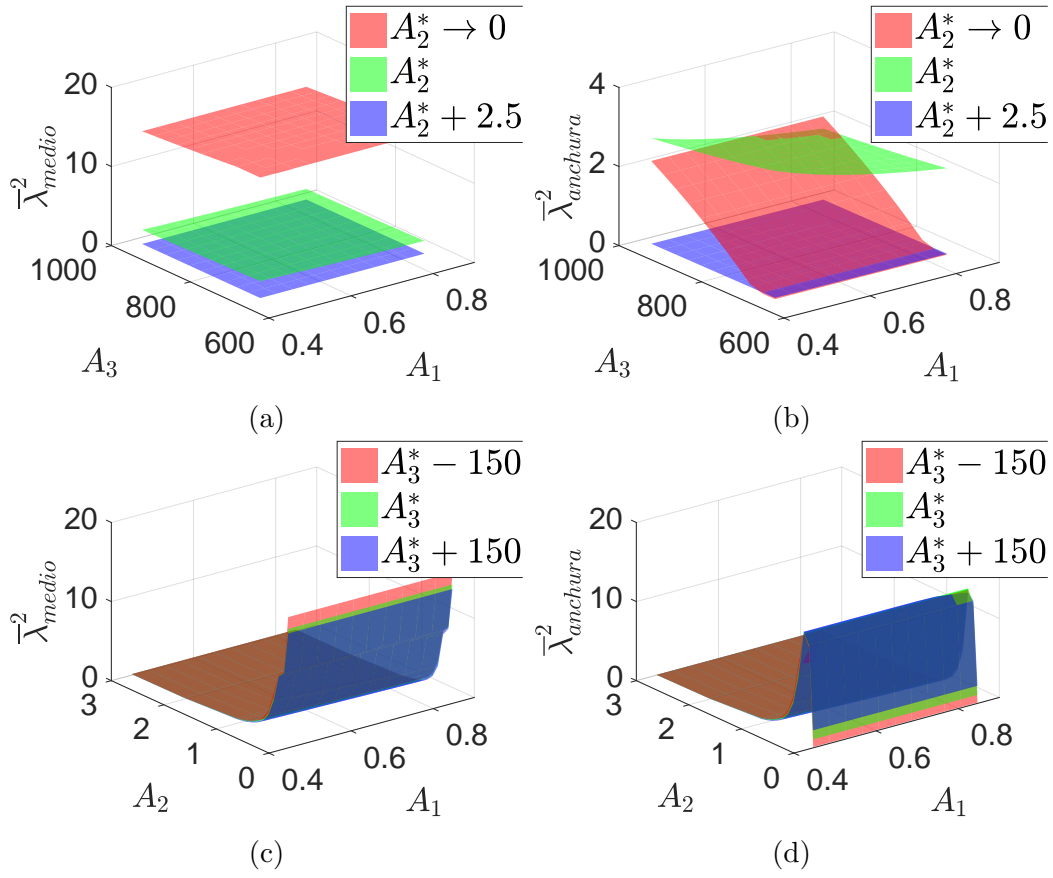


Figura 3.17: Configuración triangular: Influencia de los grupos adimensionales en el valor medio y anchura del primer *band gap*.

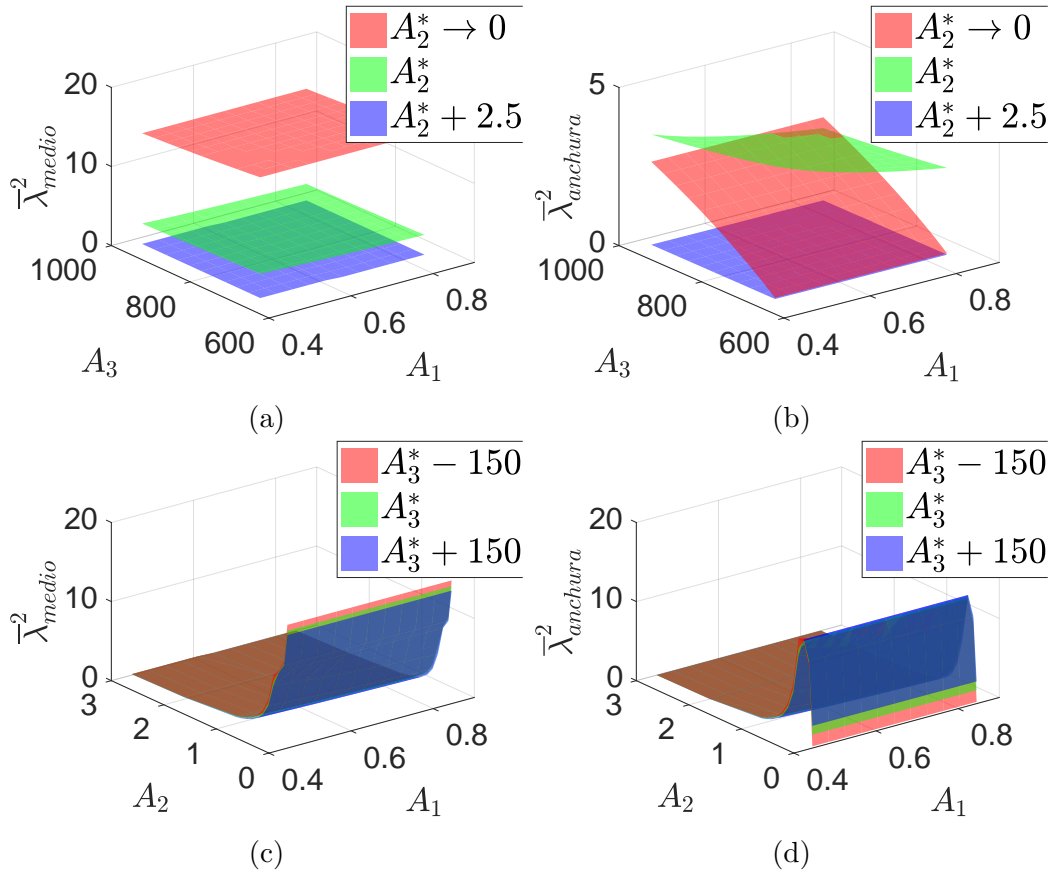


Figura 3.18: Configuración hexagonal: Influencia de los grupos adimensionales en el valor medio y anchura del primer *band gap*.

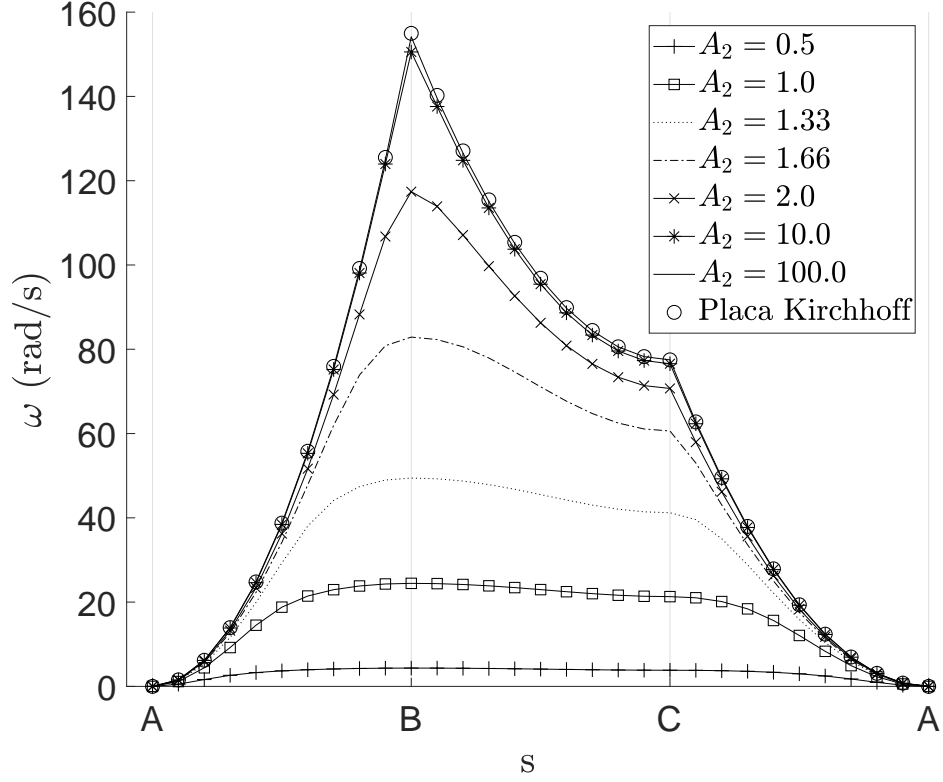


Figura 3.19: Curva de dispersión de una placa de Kirchhoff y primer modo de la estructura *lattice* con configuración cuadrada para diferentes valores de l .

3.6. Observaciones

Como se observa en las figuras 3.8a, 3.10a y 3.12a, para las propiedades mecánicas y geométricas definidas para este análisis, solo las configuraciones cuadrada y hexagonal muestra un *band gap* a la frecuencia de resonancia de una viga en voladizo ($\bar{\lambda}^2=3.51$) mientras que la triangular carece de este. Además, para otros valores de estas propiedades, la frecuencia de resonancia de una viga en voladizo no está incluida en ningún *band gap*, para ninguna de las configuraciones.

La existencia de *band gaps* para valores de frecuencia iguales a las frecuencias naturales de los resonadores internos es una característica ampliamente conocida. Como ya se analizó en el capítulo anterior, la cadena unidimensional con resonadores internos posiciona un *band gap* a la frecuencia natural del resonador interno. Sugino et al. [58, 59] estudiaron sistemas más complejos que la cadena unidimensional, donde la cadena principal de masas y muelles fue sustituida por una viga o una placa manteniendo el concepto simplificado de sistema masa-muelle como resonador de un único grado de libertad. En ambos artículos se concluye que los resonadores que vibran perpendicularmente a la viga o a la placa generan un *band gap* a la frecuencia natural del resonador.

Existe una diferencia importante entre el comportamiento de una viga/placa con resonadores internos (sistema masa-muelle) y las estructuras *lattice* compuestas por una placa y una distribución de vigas. Para estos *lattices*, la regla por la que se generan *band gaps* para valores de frecuencia iguales a las frecuencias naturales del resonador, en este caso de la viga, no puede ser generalizada. El *lattice* placa-viga es un sistema más complejo que el estudiado por Sugino et al. [58, 59]. Cada elemento tiene modos de vibración distintos y su interacción dificulta la identificación de mecanismos característicos de la propagación de ondas en estructuras *lattice*, tales como la generación de *band gaps* debido a la *Bragg scattering* o a la existencia de resonancias internas.

Surge entonces el interés por avanzar en el análisis del fenómeno evidenciado por Sugino et al. [58, 59] para el caso en que los resonadores son vigas esbeltas en lugar de sistemas masa-muelle. Con objeto de realizar este estudio, se ha preferido considerar un sistema que, si bien es más sencillo que el sistema placa-viga, mantienen las características esenciales de dan lugar a los fenómenos que se quieren analizar. Por ello, en la siguiente sección se analiza la propagación de ondas en una estructura *lattice* compuesta por una viga que constituye el sustrato de una distribución periódica de vigas.

3.7. Análisis de propagación de ondas en estructuras *lattice* viga-viga

La estructura *lattice* viga-viga, compuesta por una viga como sustrato con una distribución periódica de vigas unida a ella, representa una simplificación del sistema placa-viga estudiado en este capítulo. A pesar de ello, este modelo permite estudiar el efecto que produce un resonador con tipología de viga para la aparición de *band gaps* en la estructura *lattice*. Además se va a considerar que tanto la viga del sustrato como las vigas verticales son deformables en dirección axial.

En el artículo de Sugino et al. [58] se estudia el caso de la viga con una distribución periódica de sistemas masa-muelle en lugar de las vigas verticales. Como se ha indicado anteriormente, para este caso se genera un *band gap* cuyo valor medio está próximo a la frecuencia natural del resonador y su anchura depende de la relación entre la masa total de los resonadores y la masa total de la viga. Sin embargo, estos sistemas masa-muelle representan una idealización alejada de la realidad. Un resonador real tiene masa y rigidez distribuidas a lo largo de su longitud y su vibración no es exclusivamente perpendicular al sustrato. Por tanto, este estudio analiza un caso más general y realista que el de la publicación del citado autor.

El estudio que se presenta a continuación muestra la notable influencia de las frecuencias naturales del resonador en la existencia, posición y anchura de los *band gaps*. En algunos casos se generan *band gaps* alrededor de las frecuencias naturales de las vigas verticales, pero en otros casos estas frecuencias delimitan la anchura de un determinado *band gap*. Además, se observa que la existencia del *band gap* dependerá de los valores de los parámetros del problema. Esto impide la generalización de la regla por la que debe aparecer un *band gap* para frecuencias iguales a las frecuencias naturales del resonador.

3.7.1. Formulación del problema

Se considera una estructura *lattice* compuesta por una viga infinita paralela al eje X con una distribución periódica de vigas verticales unidas rígidamente a ella por sus extremos inferiores (Fig. 3.20a). La longitud de las vigas verticales y la distancia entre ellas es igual a L . Se consideran que las

vigas verticales tienen un radio de giro mucho menor que su longitud, permitiendo el uso de la teoría de Euler-Bernoulli y despreciando los efectos de deformación por cortante. Las vigas verticales y horizontal tienen el mismo módulo de Young E y densidad volumétrica ρ_{vol} . Los diámetros de las vigas horizontal y vertical son D_H y D_V , respectivamente.

La figura 3.20b muestra la celda unitaria irreducible correspondiente al *lattice* viga-viga, juntos con los grados de libertad del sistema: u, w representan los desplazamientos en dirección X e Z, respectivamente, y θ representa la rotación alrededor del eje perpendicular al plano de la estructura.

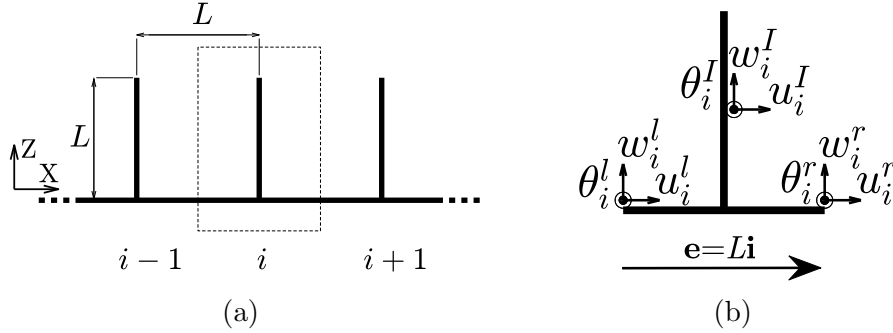


Figura 3.20: Estructura *lattice*: (a) Modelo, (b) Celda unitaria i con grados de libertad del contorno (izquierda l y derecha r) y puntos interiores I , y el vector base del *lattice* \mathbf{e} .

3.7.2. Análisis numérico

Se utiliza un modelo de celda correspondiente a la celda unitaria de la figura 3.20b para aplicar la metodología de Bloch (sección 2.2.2). Esta metodología se va a aplicar junto con un modelo de elementos finitos de la celda unitaria para resolver un problema de autovalores y obtener la relación de dispersión. La celda unitaria se ha modelado como dos vigas perpendiculares rígidamente unidas en el punto medio de la viga horizontal. Las matrices de rigidez y de masa se construyen para elementos de tipo viga de Euler-Bernoulli de dos nodos [22], utilizándose 20 elementos para cada viga.

La metodología de Bloch comienza con la formulación del problema de

vibraciones libres de la celda unitaria, considerada esta con bordes libres,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad (3.19)$$

donde \mathbf{K} y \mathbf{M} son las matrices de rigidez y masa, respectivamente, y \mathbf{U} es el vector de desplazamientos nodales. Admitiendo una solución de onda plana, la ecuación (3.19) se transforma en

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{U} = \mathbf{0}. \quad (3.20)$$

Los nodos pueden identificarse como internos o de contorno. El teorema de Bloch establece una condición de ligadura entre los desplazamientos nodales del contorno

$$\mathbf{U}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{r}} = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}} \mathbf{U}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{l}} = e^{i\bar{\kappa}} \mathbf{U}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{l}}, \quad (3.21)$$

donde $\mathbf{U}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{r}}$ son los desplazamientos nodales del contorno derecho e izquierdo, respectivamente

$$\mathbf{U}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} u_i^{\mathbf{r}} \\ v_i^{\mathbf{r}} \\ \theta_i^{\mathbf{r}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{l}} = \begin{pmatrix} u_i^{\mathbf{l}} \\ v_i^{\mathbf{l}} \\ \theta_i^{\mathbf{l}} \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

y se ha introduce el número de onda adimensional $\bar{\kappa} = \kappa L$, siendo el vector de onda $\mathbf{k} = \kappa \mathbf{i}$. Por tanto, el vector \mathbf{U} puede expresarse en función del vector de desplazamientos independientes ($\mathbf{U}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{l}}$ y $\mathbf{U}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{I}}$) como

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{r}} \\ \mathbf{U}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{l}} \\ \mathbf{U}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{I}} \end{Bmatrix} = \mathbf{W} \tilde{\mathbf{U}}; \quad (3.23)$$

con

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} e^{i\bar{\kappa}} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{U}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{l}} \\ \mathbf{U}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{I}} \end{Bmatrix}, \quad (3.24)$$

donde N es el número de nodos internos e \mathbf{I}_N es la matriz identidad de orden N . Introduciendo la ecuación (3.23) en (3.20), y premultiplicando por $\mathbf{W}^{\mathbf{H}}$, se obtiene

$$[\mathbf{K}_{\mathbf{r}}(\kappa) - \omega^2 \mathbf{M}_{\mathbf{r}}(\bar{\kappa})] \tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{0}, \quad (3.25)$$

donde $\mathbf{K}_{\mathbf{r}} = \mathbf{W}^{\mathbf{H}} \mathbf{K} \mathbf{W}$ y $\mathbf{M}_{\mathbf{r}} = \mathbf{W}^{\mathbf{H}} \mathbf{M} \mathbf{W}$ son las respectivas matrices de rigidez y masa reducidas.

A partir de la ecuación característica

$$|\mathbf{K}_r(\bar{\kappa}) - \omega^2 \mathbf{M}_r(\bar{\kappa})| = 0 \quad (3.26)$$

se obtiene una representación por puntos de la relación de dispersión $\omega = \omega(\bar{\kappa})$ para la zona irreducible de la PZB ($\bar{\kappa} \in [0, \pi]$). Las formas modales $\mathbf{U} = \mathbf{W}\tilde{\mathbf{U}}$ se obtienen finalmente mediante la ecuación (3.23).

3.7.3. Análisis de resultados

Se ha obtenido la relación de dispersión para unas propiedades mecánicas y geométricas específicas, correspondientes al acero, recogidas en la tabla 3.13 junto con las dimensiones geométricas del sistema.

Parámetro	Valor
Módulo de Young (E)	2.1e11 N/m ²
Densidad volumétrica (ρ_{vol})	7800 kg/m ³
Longitud de la viga (L)	1 m
Diámetro horizontal (D_H)	0.1 m
Diámetro vertical (D_V)	0.15 m

Tabla 3.13: Propiedades mecánicas y geométricas de la estructura *lattice* viga-viga.

En un primer análisis se van a utilizar los valores de diámetro especificados en la tabla 3.13. En un segundo análisis, se modificarán estos valores para analizar su influencia en la estructura de bandas. Los resultados de ambos análisis se compararán con las frecuencias naturales de una viga de longitud l y diámetro d con condiciones de contorno empotrada-libre (E–L, en adelante) o empotrada-apoyada (E–A, en adelante) para mostrar su influencia en la estructura *lattice*. Los parámetros l y d tomarán, según corresponda, los valores de longitud y diámetro de las vigas horizontal y verticales.

Curvas de dispersión y formas modales

En la figura 3.21a se presentan las curvas de dispersión para los valores de los parámetros especificados en la tabla 3.13. En las figuras 3.21b y 3.21c se representan las formas modales correspondientes a la curva de dispersión 3 y $\kappa = 0$ y a la curva de dispersión 5 y $\kappa = \pi$, respectivamente. Para la curva 3 en $\kappa = 0$, el desplazamiento transversal de la viga vertical, mostrado en la figura 3.21b, coincide con la primera forma modal en flexión de una viga E–L (obviando el movimiento de sólido rígido debido al desplazamiento y rotación en el punto de unión de la viga horizontal). Para la curva 5 en $\kappa = \pi$, la deformación de la viga vertical se corresponde con el primer modo axial de una viga E–L (Fig. 3.21c); en relación a la viga horizontal, cada mitad de la viga muestra un desplazamiento transversal que se ajusta al primer modo en flexión de una viga E–A. Estas evidencias sugieren que las correspondientes frecuencias naturales influyen en las curvas de dispersión.

Como se comentó anteriormente, Sugino et al. [58, 59] afirman que se genera un *band gap* para valores de frecuencia iguales a la frecuencia natural del resonador, compuesto por un sistema masa-muelle de rigidez k y masa m (frecuencia natural $\omega = \sqrt{k/m}$) que vibra perpendicularmente a la viga. Como se puede observar en la figura 3.21a, existe un *band gap* entre los modos 3 y 4. Si se superponen en la figura los valores de frecuencia correspondientes a los primeros modos axiales y en flexión de una viga E–L ($l = L$, $d = D_V$) y al primer modo a flexión de una viga E–A ($l = L/2$, $d = D_H$), se puede comprobar que ninguna se aproxima al valor medio del *band gap*. Sin embargo, se puede apreciar que cuando κ tiende a π , las curvas 2 y 5 se aproximan hacia estas frecuencias naturales. La frecuencia de la curva 3 en $\kappa = 0$, que muestra para la viga vertical un modo en flexión E–L, coincide con la frecuencia del primer modo a flexión de una viga E–L. La frecuencia de la curva 5 en $\kappa = \pi$, que muestra para la viga vertical un modo axial E–L y para la viga horizontal un modo a flexión E–A, está limitada por la frecuencia del primer modo axial de una viga E–L y por la frecuencia del primer modo a flexión de una viga E–A.

A partir del análisis de estos resultados, resulta evidente que las frecuencias naturales de los elementos horizontal y vertical aislados juegan un papel importante en el comportamiento dispersivo de la estructura *lattice*. Además, se observa que los *band gaps* no aparecen alrededor de las frecuencias natu-

rales de la viga vertical, al menos para el conjunto de propiedades mecánicas estudiadas. Este hecho indica que la consideración de resonadores más complejos, como en el caso del *lattice* placa-viga, no permite asegurar la existencia de *band gaps* a las frecuencias naturales de la viga vertical. A continuación se realiza un análisis para evidenciar la influencia de las frecuencias naturales en la estructura de bandas.

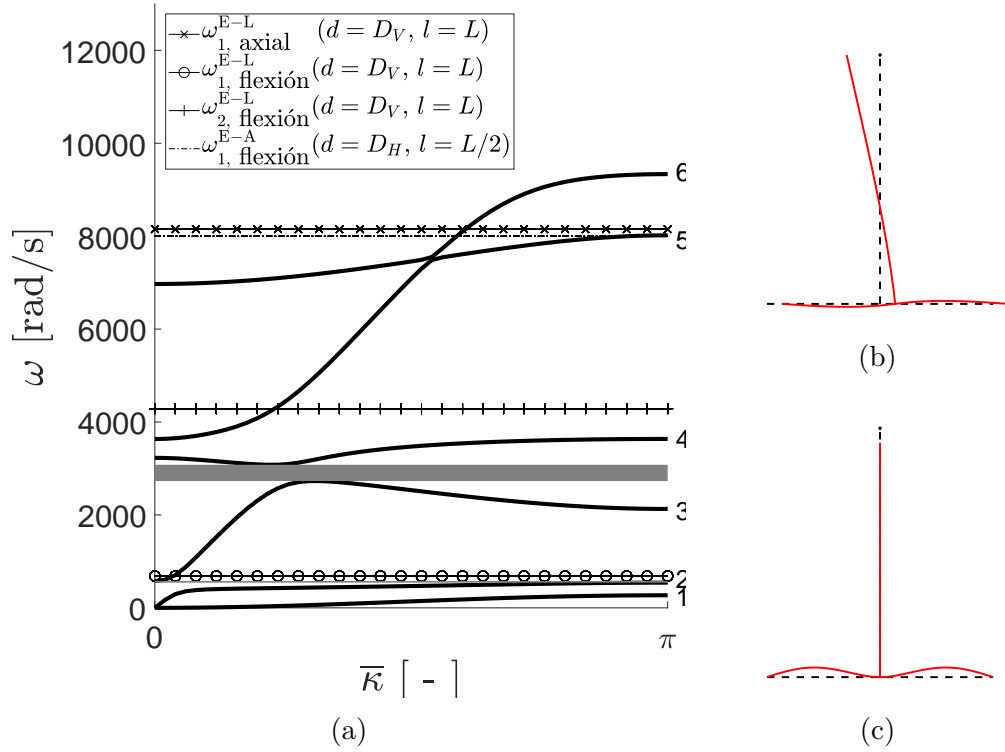


Figura 3.21: (a) Curvas de dispersión (líneas sólidas) y *band gap* (zona gris) para $D_V = 0.15$ m, $D_H = 0.1$ m y $L = 1.0$ m y frecuencias naturales de vigas empotrada-libre (E–L) y empotrada-apoyada (E–A), (b) Forma del modo 3 en $\bar{\kappa} = 0$, (c) Forma del modo 5 en $\bar{\kappa} = \pi$.

Evolución de la estructura de bandas con el diámetro de la viga vertical

Con el objetivo de estudiar la influencia de las frecuencias naturales de las vigas verticales, o de la viga horizontal, en la estructura de bandas, se ha

realizado un análisis paramétrico variando el diámetro D_V , modificando en consecuencia el área y el momento de inercia de la sección recta de la viga vertical. De esta forma se modifican las frecuencias de los modos de flexión de la viga vertical, mientras que las correspondientes a los modos axiales permanecen invariantes. El estudio consiste en obtener la estructura de bandas en función de D_V (se ha considerado un rango de valores de 0.01 m a 0.30 m) para dos valores diferentes del diámetro horizontal: $D_H = 0.1$ m y $D_H = 0.05$ m, y analizar la influencia de las frecuencias naturales de la viga de longitud l y diámetro d bajo determinadas condiciones de contorno en dicha estructura de bandas.

Las figuras 3.22 y 3.23 muestran la evolución de la estructura de bandas para $D_H = 0.1$ m y $D_H = 0.05$ m, respectivamente. Las zonas grises representan la anchura de los *band gaps* para un determinado D_V . Las frecuencias naturales de los primeros modos axiales y en flexión de una viga E–L de longitud l y diámetro d , y de los primeros modos a flexión de una viga E–A de longitud l y diámetro d se muestran en ambas figuras para los valores especificados de las propiedades mecánicas.

A partir de las figuras 3.22 y 3.23, se puede observar que las frecuencias naturales de vibración axial y a flexión de las vigas E–L y E–A desarrollan un papel decisivo en la formación de *band gaps*. Para valores reducidos de D_V , las frecuencias naturales de una viga E–L a flexión están incluidas en los *band gaps*. Esto validaría, para pequeños valores de D_V , la hipótesis de que el *band gap* aparece para valores próximos a la frecuencia natural del resonador, y su efecto es similar al de un resonador masa-muelle unido a una viga horizontal [58]. Cuando se incrementa D_V , los *band gaps* no se generan para valores próximos de las frecuencias naturales y, en cambio, son estas frecuencias las que limitan la anchura del *band gap*. Este comportamiento puede observarse para $D_H = 0.1$ m y $D_H = 0.05$ m. La transición de este efecto aparece alrededor de $D_V/D_H = 1$. Para $D_V/D_H < 1$, los resonadores generan *band gaps* para valores de frecuencia iguales a las frecuencias naturales de modos en flexión de una viga E–L. A diferencia de esto, para $D_V/D_H > 1$, las frecuencias naturales de modos axiales de una viga E–L junto con las de modos en flexión de una viga E–L y E–A determinan la anchura de los *band gaps*.

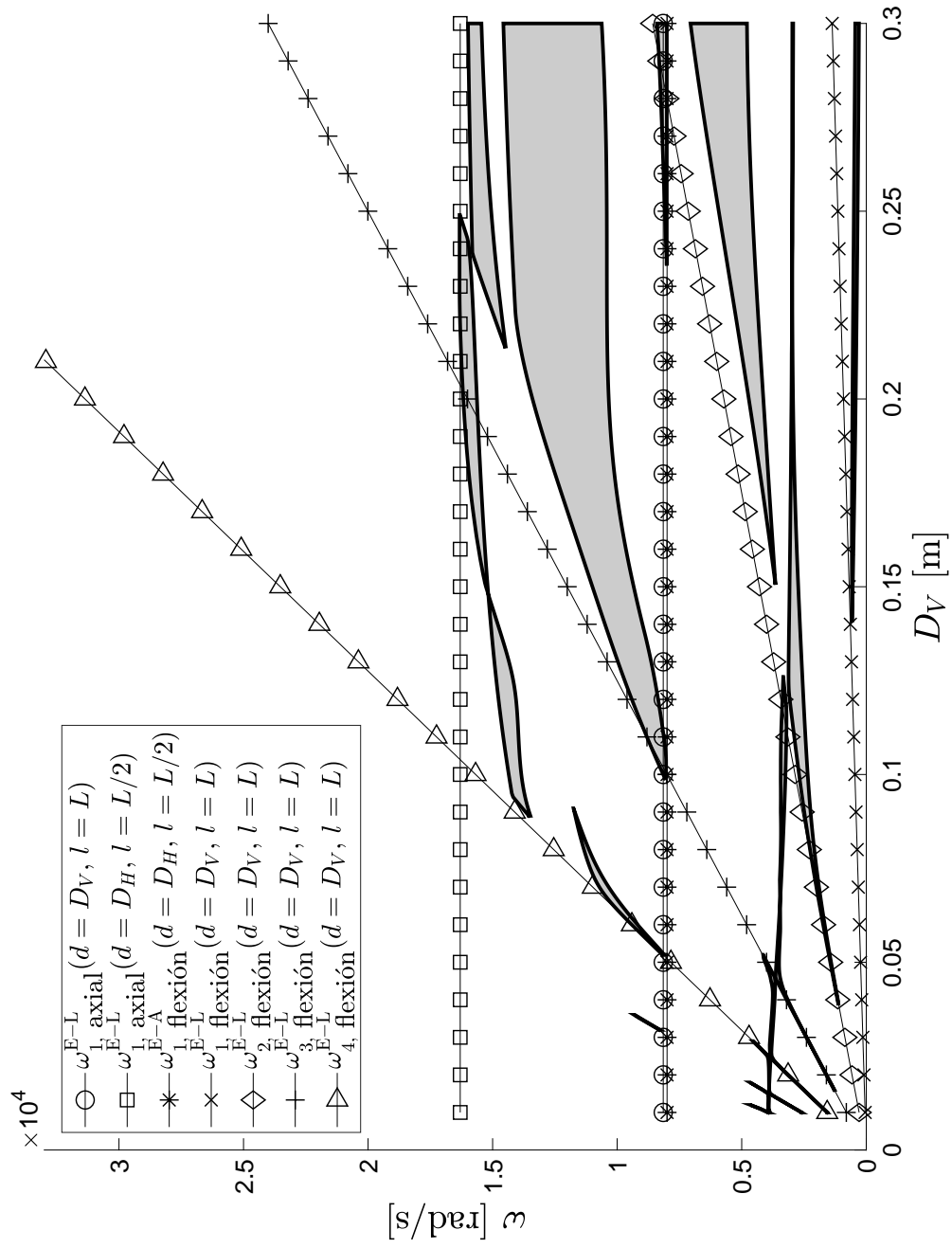


Figura 3.22: Evolución de los *band gaps* con D_V , $D_H = 0.1$ m y $L = 1.0$ m junto con las frecuencias naturales del resonador y del sustrato.

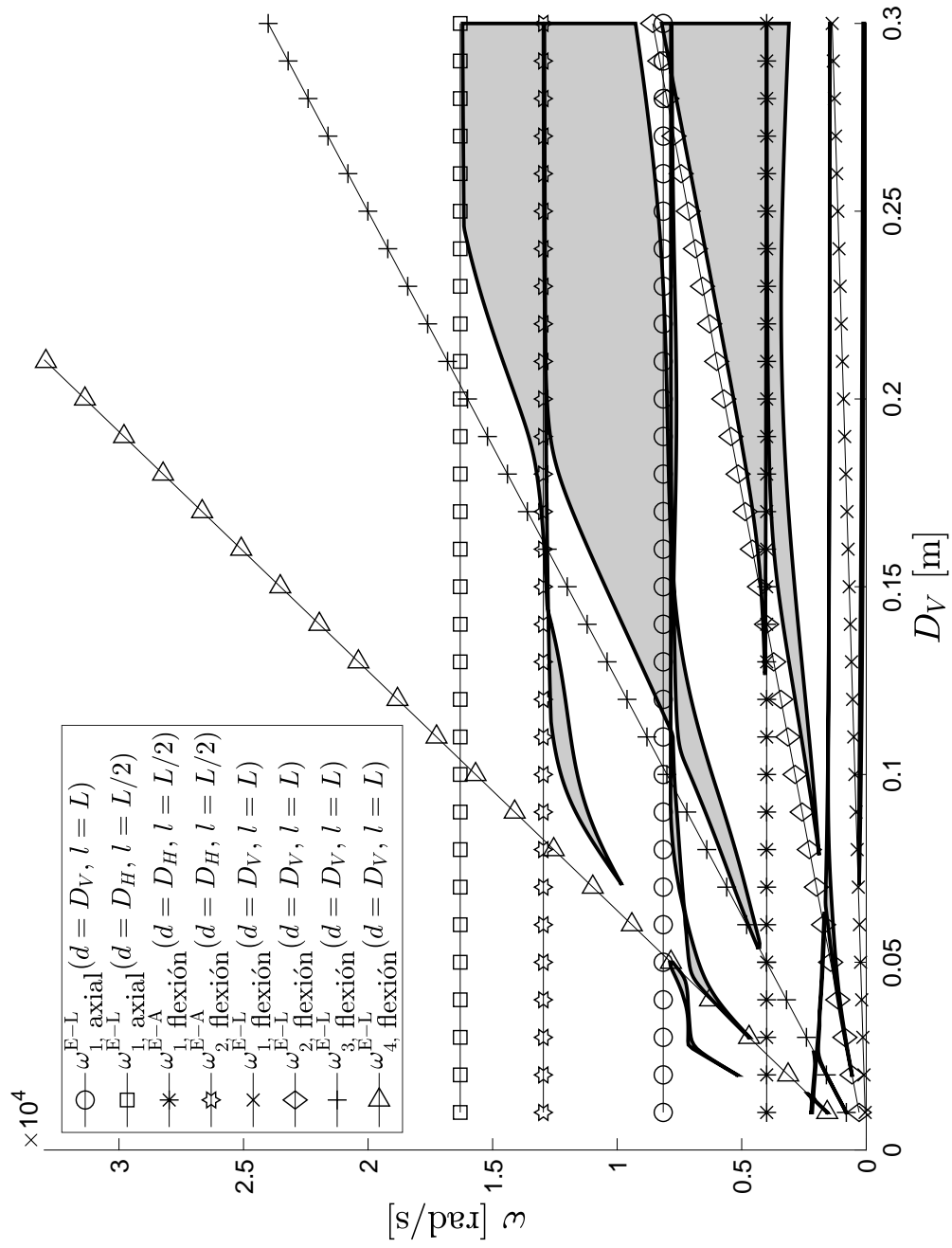


Figura 3.23: Evolución de los *band gaps* con D_V , $D_H = 0.05$ m y $L = 1.0$ m junto con las primeras frecuencias naturales del resonador y del sustrato.

3.8. Conclusiones

En el presente capítulo se han analizado las características dispersivas, estructura de bandas y la direccionalidad de la propagación de ondas para estructuras *lattice* compuestas por tres distribuciones periódicas (cuadrada, triangular y hexagonal) de vigas rígidamente unidas a una placa. Esta tipología de estructura *lattice*, compuesta por una placa realizando la función de sustrato horizontal sobre la que se conecta una distribución de vigas, ha sido analizada anteriormente, y de manera más limitada, por Eremeyev et al. [31]. El citado autor obtiene la relación de dispersión suponiendo una distribución densa de vigas, simplificando su obtención y obviando los efectos de escala presentes en el sólido. En este capítulo se ha considerado la geometría de la distribución periódica de vigas como un parámetro adicional para el análisis de propagación de ondas. Debido al elevado número de parámetros físicos que participan en el problema, se ha desarrollado un análisis dimensional que ha permitido obtener tres grupos adimensionales. Estos grupos permiten simplificar el análisis de propagación de ondas de estas estructuras y facilitar su diseño para unos requerimientos específicos de atenuación de las ondas. La periodicidad del sistema ha permitido la aplicación del teorema de Bloch para obtener las principales características de la propagación de ondas a partir del análisis de una única celda unitaria. La combinación del teorema de Bloch con un procedimiento basado en el MEF ha permitido obtener las relaciones de dispersión correspondientes a cada configuración. El análisis de estas relaciones ha permitido obtener las siguientes conclusiones:

- La estructura *lattice* placa-viga presenta *band gaps* para las tres configuraciones. Si bien las tres pueden ser apropiadas para la atenuación de ondas, la configuración hexagonal, con tres *band gaps*, destaca como la óptima para el aislamiento de ondas a baja frecuencia, a cambio de un mayor número de vigas por unidad de superficie.
- Los diagramas de velocidad de fase y de grupo muestran el cambio de comportamiento de isotrópico a anisótropo al aumentar la frecuencia. Para valores reducidos de frecuencia del primer modo, la propagación de las ondas se produce a la misma velocidad en todas las direcciones del sólido, coincidiendo con un comportamiento característico de sólidos isotrópicos. En cambio, para valores elevados de la frecuencia, este comportamiento es anisótropo y las ondas se propagan según unas

direcciones preferentes. También se ha mostrado la presencia de cáusticas en las tres configuraciones estudiadas. Este fenómeno aparece para algunas direcciones de propagación y está relacionado con flujos de energía focalizados.

- Los tres grupos adimensionales obtenidos a partir del análisis dimensional relacionan la densidad entre placa y viga, el tamaño de la celda frente a la longitud de la viga y la rigidez de la viga con la de la placa, respectivamente.
- Un estudio paramétrico de la influencia de los grupos adimensionales en la posición y anchura del primer *band gap* ha revelado un comportamiento similar para las tres configuraciones. Para el rango de valores estudiados, el grupo adimensional A_2 , que relaciona la dimensión característica de la celda con la longitud de la viga, es el más relevante.
- El análisis de la estructura de bandas ha indicado que los *band gaps* no aparecen como regla general para valores de las frecuencias naturales de las vigas verticales. Esto contrasta con los resultados de otros estudios (Sugino et al. [58, 59], entre otros) que confirman la existencia de este efecto de forma generalizada cuando se emplean sistemas masa-muelle como resonadores.
- El análisis de las características dispersivas del *lattice* viga-viga, donde se utilizan vigas verticales como resonadores, ha mostrado excepciones a esta regla cuando se emplean sistemas más complejos como resonadores. Esta complejidad da lugar a una estructura de bandas condicionada por los valores que toman las frecuencias naturales de las vigas verticales. A partir de los resultados obtenidos se concluye que, para resonadores más complejos que los sistemas masa-muelle, la existencia de *band gaps* para valores de frecuencia iguales a las frecuencias naturales del resonador no puede ser generalizada. Las vigas verticales del *lattice* placa-viga y del *lattice* viga-viga representan mejor el comportamiento real de un resonador que los sistemas masa muelle. La dificultad de generar *band gaps* a las frecuencias deseadas a partir de las frecuencias naturales de resonadores más realistas acentúa la relevancia del estudio de los grupos adimensionales.

En conclusión, el análisis realizado ha permitido mostrar la existencia de *band gaps* en placas delgadas con una distribución periódica de vigas, es decir,

se ha mostrado la capacidad de estas estructuras de atenuar la propagación de ondas para determinadas frecuencias. El estudio de los grupos adimensionales ofrece una mejor comprensión sobre la influencia de los parámetros del sistema en la estructura de bandas, a la vez que permite el diseño de este tipo de estructuras *lattice* para la atenuación de ondas, dada la dificultad de generar *band gaps* a las frecuencias propias de los resonadores internos.

Capítulo 4

Introducción a los modelos del Continuo Generalizado

Aunque se reconoce que la materia es esencialmente discreta y que las formulaciones basadas en modelos atomísticos o moleculares pueden representar el comportamiento de los sólidos, el coste computacional asociado a la utilización de estas técnicas es prohibitivo. Por este motivo se prefiere, en general, la utilización de modelos continuos en una gran variedad de aplicaciones. Así, la Mecánica del Medio Continuo Clásico (MMC) se utiliza intensamente en la resolución de una gran cantidad de problemas relacionados con muy diversos campos de la ingeniería. Esta teoría no recoge parámetros de escala en su formulación y, sin embargo, aborda con éxito problemas en los que la escala de observación es mucho mayor que las distancias características del medio discreto que modela.

No obstante, las tecnologías emergentes han atraído la atención sobre problemas relacionados con composites, materiales funcionales cuyas propiedades varían espacialmente, materiales granulares, sólidos estructurados, metaestructuras y nanoestructuras, en los que se estudian fenómenos cuyas longitudes características (longitud de onda de una perturbación que se propaga, soporte en el que se aplica una fuerza exterior, etc) son del mismo orden que las dimensiones microestructurales características del sistema. En estas condiciones, aparecen efectos de escala que las teorías clásicas, por su propia naturaleza, no pueden reproducir, como ya se ha indicado. Los efectos de escala han sido puestos de manifiesto por diferentes autores [60, 61, 62], que han realizado ensayos mecánicos sobre nanoestructuras, mostrando que

algunas características de estas, como su rigidez, se ven modificadas cuando se acentúa el citado efecto de escala.

La Mecánica del Medio Continuo Generalizado (MMCG) es una alternativa atractiva para resolver estas limitaciones y ha despertado en los últimos años un notable interés. La MMCG relaja ciertos axiomas de la MMC clásica e introduce nuevas variables y parámetros, tratando de recoger los efectos de heterogeneidad microestructural y de escala antes mencionados. Esta teoría tiene sus orígenes a finales del siglo XIX y principios del XX, experimentando un renacimiento en los años 60. Durante la última década ha emergido con gran fuerza gracias al desarrollo de la nanotecnología y de nuevos materiales con microestructura compleja y a un mejor conocimiento de los efectos de tamaño.

Existe una notable variedad de teorías encuadradas en el marco de MMCG. En este capítulo se recogen muy brevemente algunos conceptos generales asociados a estas nuevas teorías y se desarrollan sucintamente las bases y algunos resultados relativos a tres de ellas.

4.1. Breves ideas sobre modelos del Continuo Generalizado

La preocupación por el desarrollo de modelos continuos que tengan en cuenta efectos de escala, a diferencia de los modelos clásicos, es antigua. Ya en el siglo XX se pueden encontrar trabajos de Cauchy y Voigt y a principio del XX las aportaciones de los hermanos Cosserat. En la década de los 60 del siglo pasado estas formulaciones experimentaron un resurgimiento con los trabajos de Toupin, Mindlin, Kunin, Eringen entre otros. En las dos últimas décadas, los modelos del continuo generalizado, en especial los derivados de la elasticidad no local, están cobrando un gran impulso con su aplicación al análisis de nanoestructuras, presentes actualmente en numerosos campos de la ingeniería. Askas y Aifantis [63] han realizado una excelente revisión sobre esta temática.

Dentro de las teorías del Continuo Generalizado desarrolladas hasta la actualidad, que consideran los efectos de escala en su formulación, aquí cita-

remos las que se pueden englobar en dos grupos:

1. **La teoría de elasticidad no local.** Esta teoría se inició con los trabajos de Kröner [64], Krumhansl [65] y Kunin [66], y fue desarrollada más adelante por Eringen y colaboradores [67, 19, 68]. Estas teorías introducen la consideración del efecto de escala a través de la formulación de las ecuaciones constitutivas que tratan de recoger las interacciones de larga distancia, postulando que la tensión en un punto es función del estado de deformación en todo el dominio del sólido. La teoría se formula originalmente en forma integral para materiales elástico-lineales, no locales, isótropos y homogéneos.
2. **La teoría de elasticidad con gradientes de deformación y de velocidades.** Fue desarrollada fundamentalmente por Mindlin [24] quien postuló una teoría general de elasticidad basada en la existencia de una micro- y una macro-estructura, ambas con densidades y propiedades mecánicas diferentes y con una interacción mecánica entre ellas. Estas teorías tratan de recoger el efecto de escala introduciendo no solo las deformaciones y las velocidades en la construcción de los correspondientes funcionales que representan la energía de deformación y cinética, sino también derivadas de alto orden de estas variables. La forma más general de esta teoría incluye los desplazamientos y rotaciones de la micro- y macro-estructura, así como, en el caso más general, seis tensores constitutivos con 1764 coeficientes, de los cuales 903 son independientes. Para el caso de un material homogéneo, isótropo y con simetría central el número de constantes independientes se reduce a 18. Al considerarse derivadas de alto orden de deformaciones y gradientes de velocidades, se requieren ecuaciones de balance adicionales que gobiernen el comportamiento de tensiones de alto orden, así como condiciones de contorno no clásicas.

En la práctica, el modelo de Mindlin original no se implementa para casos reales debido al gran número de parámetros que intervienen. Más recientemente, Lam et al. [60] han introducido una teoría basada en las ideas generales de Mindlin, pero mucho más simplificada, lo que ha permitido su utilización práctica en análisis de nanoestructuras, como se expondrá en las siguientes secciones.

A continuación se presenta brevemente la formulación de tres modelos correspondientes a la teoría de elasticidad no local, a la teoría de la elasticidad

con gradiente de deformación simplificada y, por último, a la teoría de la elasticidad con gradiente de inercia simplificada.

4.2. Modelo continuo mixto local/no local de Eringen

4.2.1. Consideraciones generales

La característica principal de la teoría de elasticidad no local de Eringen [19, 20] es que considera que la tensión en un punto está relacionada con la deformación de todos los puntos del sólido. Esta influencia se refleja en la ecuación constitutiva no local a través de una función (módulo no local) positiva y decreciente con la distancia entre el punto analizado y el resto de los puntos del dominio.

La ecuación constitutiva correspondiente a la teoría de la elasticidad mixta (local/no local), que combina la teoría local clásica y la no local, establece que el tensor de tensión no local $\underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{X}, t)$ en un punto \mathbf{X} de un sólido que ocupa un dominio tridimensional \mathbf{B} puede expresarse como [19, 20]

$$\underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{X}, t) = \xi_1 \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\mathbf{X}, t) + \xi_2 \int_B \alpha(|\mathbf{X}' - \mathbf{X}|, \kappa) \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\mathbf{X}', t) dB(\mathbf{X}') \quad (4.1)$$

donde $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\mathbf{X}, t)$ es el tensor clásico de tensión en un punto \mathbf{X} y $\alpha(|\mathbf{X}' - \mathbf{X}|, \kappa)$, el módulo no local. Aquí, $|\mathbf{X}' - \mathbf{X}|$ es la distancia euclídea y k_m es una constante del material dada por $\kappa = m_0 d$, que depende de la longitud característica de la microestructura d a través de una constante de ajuste del material m_0 . El tensor clásico de tensión está relacionado con el tensor de deformación infinitesimal $\underline{\underline{\epsilon}}(\mathbf{X}, t)$ mediante las relaciones constitutivas convencionales de un material regido por la ley de Hooke

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\mathbf{X}, t) = \underline{\underline{\mathbf{C}}} : \underline{\underline{\epsilon}}(\mathbf{X}, t) \quad (4.2)$$

siendo $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ el tensor de elasticidad de cuarto orden y $\underline{\underline{\epsilon}}(\mathbf{X}, t)$ la deformación infinitesimal obtenida como

$$\underline{\underline{\epsilon}}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2} \left([\nabla \mathbf{U}(\mathbf{X}, t)]^T + \nabla \mathbf{U}(\mathbf{X}, t) \right) \quad (4.3)$$

donde ∇ es el vector gradiente. Finalmente, la densidad de energía potencial se define como

$$\mathbb{W} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{X}, t) : \underline{\underline{\epsilon}}(\mathbf{X}, t) \quad (4.4)$$

y la densidad de energía cinética se define en su forma clásica como

$$\mathbb{T} = \frac{1}{2} \rho \left[\frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right] \quad (4.5)$$

donde ρ es la densidad volumétrica del material.

Los parámetros ξ_1 y ξ_2 de la expresión (4.1) representan las fracciones volumétricas del material que obedecen a la teoría de elasticidad local y no local, respectivamente y están relacionados mediante

$$\xi_1 + \xi_2 = 1. \quad (4.6)$$

El caso $\xi_1 = 1$ ($\xi_2 = 0$) corresponde al enfoque puramente elástico local, mientras que $\xi_1 = 0$ hace referencia a la formulación de la teoría de elasticidad puramente no local. Como se apuntará en la sección de aplicación a nanoestructuras unidimensionales, este último caso presenta problemas cuando los dominios están acotados (las nanoestructuras reales son finitas) y conduce al planteamiento de problemas que no tiene solución.

4.2.2. Aplicación a nanoestructuras unidimensionales

Diferentes autores han aplicado la formulación mixta local/no local al comportamiento mecánico de nanoestructuras. Así, Pisano et al. [69] y Zhu et al. [70] analizan el comportamiento estático de una barra sometida a esfuerzo axial; Wang et al. [71] y Zhu et al. [72], estudian, respectivamente, el problema de la flexión estática y el pandeo de vigas de Euler-Bernoulli; Fernández-Sáez y Zaera [73] han estudiado el comportamiento dinámico de este tipo de vigas, tanto las vibraciones axiales, como las transversales por flexión.

En esta sección se expone brevemente la aplicación de la formulación general al estudio del comportamiento de nanoestructuras unidimensionales,

en particular, a la vibración axial y transversal por flexión de vigas que obedecen la cinemática de Euler-Bernoulli.

En estos estudios se adopta para el módulo no local $\alpha(|\mathbf{X}' - \mathbf{X}|, \kappa)$ especializado para casos unidimensionales la siguiente expresión

$$\alpha(|\bar{x} - x|, \kappa) = \frac{1}{2\kappa} e^{-\frac{|\bar{x} - x|}{\kappa}}. \quad (4.7)$$

El uso de este tipo de módulo, que corresponde a los denominados de tipo Helmholtz, permite transformar las ecuaciones integro-diferenciales de la formulación original a ecuaciones diferenciales que simplifican notablemente el análisis.

Vibraciones axiales de vigas

La aplicación de la teoría general a las vibraciones axiales (a lo largo de su eje longitudinal x) de una viga de longitud L y sección recta constante A conduce a la siguiente ecuación que gobierna el desplazamiento longitudinal $U(x, t)$ de las secciones de la viga (los detalles de este análisis se pueden encontrar en el trabajo de Fernández-Sáez y Zaera [73])

$$E \left[\xi_1 U'(x, t) + \xi_2 \frac{1}{2\kappa} \int_0^L e^{-\frac{|\bar{x} - x|}{\kappa}} U'(s, t) d\bar{x} \right]' = \rho \ddot{U}(x, t) \quad (4.8)$$

donde $(\bullet)'$ y $\ddot{\bullet}$ indican las derivadas con respecto a x y t , respectivamente.

Para resolver la ecuación integro-diferencial (4.8), es necesario imponer las correspondientes condiciones iniciales y de contorno. En este problema aparecen operadores espaciales de segundo orden, con lo cual se necesitan 2 condiciones de contorno (uno por cada extremo) como ocurre en el caso de la elasticidad clásica. Así pues son suficientes las condiciones clásicas para obtener la solución completa.

Las especiales características del módulo no local definido por la ecuación (4.7) permite transformar la ecuación integro-diferencial (4.8) en la siguiente ecuación diferencial

$$EU''(x, t) + \xi_1 \rho \kappa^2 \left(\ddot{U}(x, t) \right)'' - \xi_1 E \kappa^2 U^{IV}(x, t) = \rho \ddot{U}(x, t), \quad (4.9)$$

La anterior transformación requiere que se cumplan dos nuevas condiciones de contorno, una en cada extremo de la viga [75, 74, 73], denominadas condiciones de contorno constitutivas [74]. Como se puede observar, el orden del operador espacial aumenta (ahora es de cuarto orden) requiriéndose, por tanto, el cumplimiento de cuatro condiciones de contorno, las cuales quedan establecidas por las clásicas junto con las constitutivas derivadas de la transformación de la ecuación integro-diferencial.

Vibraciones transversales de vigas

Cuando la teoría general se aplica al análisis de las vibraciones por flexión de vigas de Euler-Bernoulli se alcanza la siguiente ecuación integro-diferencial que gobierna los desplazamientos transversales de la viga $W(x, t)$ (de nuevo los detalles de este desarrollo pueden encontrarse en el reciente trabajo de Fernández-Sáez y Zaera [73])

$$EI \left[\xi_1 W''(x, t) + \xi_2 \frac{1}{2\kappa} \int_0^1 e^{-\frac{|\bar{x}-x|}{\kappa}} W''(s, t) d\bar{x} \right]'' = -\rho A \ddot{W}(x, t). \quad (4.10)$$

Para resolver la ecuación integro-diferencial (4.10) es necesario imponer las correspondientes condiciones iniciales y de contorno. En este problema aparecen operadores espaciales de cuarto orden, con lo cual se necesitan cuatro condiciones de contorno (dos por cada extremo) como ocurre en el caso de la elasticidad clásica, es decir, bastan las condiciones clásicas para obtener la solución completa.

No obstante, se puede aplicar una transformación similar a la indicada en el caso de las vibraciones axiales para obtener la siguiente ecuación diferencial para la variable $W(x, t)$

$$EIW^{IV}(x, t) - \xi_1 EI\kappa^2 W^{VI}(x, t) - \rho A\kappa^2 (\ddot{W}(x, t))'' = -\rho A \ddot{W}(x, t), \quad (4.11)$$

donde I representa el momento de inercia de la sección recta de la viga. En la ecuación anterior aparecen operadores espaciales de sexto orden, requiriéndose, por tanto, seis condiciones de contorno, (tres por cada extremo). A las condiciones de contorno clásicas es necesario añadir las denominadas condiciones de contorno constitutivas, derivadas de la transformación de la ecuación integro-diferencial (4.10) a la ecuación diferencial (4.11) [75, 74, 73], quedando el problema completamente definido.

Observaciones

La transformación que permite formular el problema en forma diferencial en lugar de en su forma integro-diferencial original más complejo, factible cuando se utiliza un módulo no local de tipo Helmholtz, simplifica notablemente el análisis. A partir el trabajo de Peddieson et al. [76], el número de publicaciones en las que se recoge la forma diferencial del caso correspondiente a una teoría puramente no local, es decir, con $\xi_1 = 0$ y $\xi_2 = 1$, aplicado al análisis de nanoestructuras es muy elevado. Baste recordar aquí las siguientes revisiones sobre el tema publicadas recientemente [77, 78, 79]. Sin embargo, son conocidos los resultados paradójicos a los que conduce la teoría puramente no local cuando se aplica al comportamiento estático de nanovigas sometidas a esfuerzo axial [80], así como cuando se estudia la flexión de nanovigas en voladizo, tanto en régimen estático [76, 81, 82, 83, 84] como dinámico [85]. Aunque se han hecho algunos avances para tratar de explicar estas anomalías [86, 87], Romano et al. [74] han explicado claramente el origen de los resultados paradójicos, mostrando que, en general, el problema planteado no tiene solución, como consecuencia del incumplimiento de las condiciones de contorno denominadas constitutivas. Este requerimiento se ha obviado sistemáticamente en los análisis que se pueden encontrar en la literatura. Este inconveniente desaparece cuando se utiliza el modelo continuo mixto local/no local expuesto brevemente en este capítulo.

4.3. Modelo continuo de gradiente de deformación

4.3.1. Consideraciones generales

Lam et al. [60] proponen un modelo según la teoría de elasticidad de gradiente de deformación basándose en los desarrollos de Mindlin [21] y Fleck y Hutchinson [88].

La formulación de Lam [60] requiere solo de tres constantes no clásicas para materiales elástico-lineales e isótropos. La densidad de energía potencial correspondiente a un material de este tipo es

$$\mathbb{W} = \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{\epsilon}} + \underline{\underline{p}} \underline{\underline{\gamma}} + \underline{\underline{\tau}}^{(1)} \underline{\underline{\eta}}^{(1)} + \underline{\underline{m}}^s \underline{\underline{\chi}}^s \quad (4.12)$$

donde $\underline{\underline{\sigma}}$ es el tensor clásico de tensión y $\underline{\underline{\mathbf{p}}}$, $\underline{\underline{\tau}}^{(1)}$ y $\underline{\underline{\mathbf{m}}}^s$ son los tensores de tensión de alto orden asociados a los gradientes de dilatación, deformación desviadora y rotación, respectivamente. Estos tensores se definen como

$$\sigma_{ij} = \left(K - \frac{2G}{3}\right)\delta_{ij}\epsilon_{mm} + 2G\epsilon_{ij}, \quad (4.13)$$

$$p_i = 2Gl_0^2\gamma_i, \quad (4.14)$$

$$\tau_{ijk}^{(1)} = 2Gl_1^2\eta_{ijk}^{(1)}, \quad (4.15)$$

$$m_{ij}^s = 2Gl_2^2\chi_{ij}^s \quad (4.16)$$

donde el tensor de deformación $\underline{\underline{\epsilon}}$, el vector gradiente de dilatación $\underline{\underline{\gamma}}$, el tensor gradiente de deformación desviadora $\underline{\underline{\eta}}^{(1)}$ y el tensor gradiente de rotación simétrico $\underline{\underline{\chi}}^s$ están definidos como

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (4.17)$$

$$\gamma_i = \epsilon_{mm,i}, \quad (4.18)$$

$$\eta_{ijk}^{(1)} = \frac{1}{3}(\epsilon_{jk,i} + \epsilon_{ki,j} + \epsilon_{ij,k}) - \frac{1}{15}[\delta_{ij}(\epsilon_{mm,k} + 2\epsilon_{mk,m}) + \delta_{jk}(\epsilon_{mm,i} + 2\epsilon_{mi,m}) + \delta_{ki}(\epsilon_{mm,j} + 2\epsilon_{mj,m})], \quad (4.19)$$

$$\chi_{ij}^s = \frac{1}{2}(\theta_{i,j} + \theta_{j,i}). \quad (4.20)$$

Aquí, u_i es la i -ésima componente cartesiana del vector desplazamiento \mathbf{U} y θ_i es la i -ésima componente del vector rotación $\boldsymbol{\theta}$ expresado como

$$\theta_i = \frac{1}{2}e_{ijk}u_{k,j}, \quad (4.21)$$

δ_{ij} es la delta de Kronecker y e_{ijk} es el símbolo de permutación. El módulo de compresibilidad $K = E/(3(1 - 2\nu))$, y el módulo de cortadura $G = E/(2(1 + \nu))$ están definidos en la manera clásica a través del módulo de Young E , y del coeficiente de Poisson ν . Para completar el modelo, son necesarios tres constantes del material adicionales $l_0 > 0$, $l_1 > 0$ y $l_2 > 0$, que tienen en cuenta el efecto de escala.

La densidad de energía cinética se define en su forma clásica como

$$\mathbb{T} = \frac{1}{2}\rho \left[\frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right]. \quad (4.22)$$

A partir de la definición de los funcionales que representan la energía cinética y de deformación, aplicando el Principio de Hamilton y el Lema Fundamental de Cálculo Variacional se pueden obtener las ecuaciones de gobierno y las condiciones de iniciales y de contorno aplicables a cada caso.

4.3.2. Aplicacion a nanoestructuras unidimensionales

El modelo propuesto por Lam et al. [60] ha sido aplicado a diferentes tipos de problemas relacionados con las nanoestructuras. Kong [89] analizó el comportamiento estático y dinámico de vigas de Euler-Bernoulli, mientras que Wang [90] desarrolló un modelo para la viga de Timoshenko; Akgoz y Civalek [91, 92] analizaron el pandeo de vigas; las vibraciones longitudinales de vigas han sido también analizadas [93, 94].

Vibraciones axiales de vigas

A continuación se recoge la especialización de la teoría general a las vibraciones axiales (a lo largo de su eje longitudinal x) de una viga de Euler-Bernoulli con las características y propiedades recogidas en secciones anteriores. Los detalles de este análisis se pueden encontrar en los trabajos de Akgoz [93] y de Morassi et al.[95], entre otros.

La ecuación que gobierna el desplazamiento longitudinal $U(x, t)$ se escribe como

$$EU''(x, t) - bU^{IV}(x, t) = \rho\ddot{U}(x, t), \quad (4.23)$$

donde el parámetro b tiene la expresión

$$b = G \left(2l_0^2 + \frac{4}{5}l_1^2 \right) \quad (4.24)$$

y l_0 y l_1 son nuevos parámetros de escala asociados a esta teoría. La ecuación (4.23) debe resolverse con las correspondientes condiciones iniciales y de contorno. Como puede observarse, aparecen operadores de cuarto orden en la variable espacial x , por lo que se necesitan cuatro condiciones de contorno (dos por cada extremo de la viga), es decir, es necesario utilizar dos condiciones de contorno naturales no clásicas (una por cada extremo), cuyo significado físico no es intuitivo. De entre las condiciones no clásicas que se

derivan de la aplicación del Principio de Hamilton que conduce a la ecuación (4.23), se pueden elegir en este caso, aquellas que dan lugar a un problema de autovalores autoadjunto, garantizándose así que todos los autovalores son reales [95].

Vibraciones transversales de vigas

La teoría se puede aplicar también al análisis de las vibraciones transversales debidas a flexión de una viga de Euler-Bernoulli con las propiedades mencionadas anteriormente. Los detalles de esta análisis se pueden encontrar en los trabajos de Kong [89] y de Dilella et al. [96], entre otros.

La ecuación que gobierna el desplazamiento transversal de la viga, $W(x, t)$ se escribe

$$SW^{IV}(x, t) - KW^{VI}(x, t) = -\rho A \ddot{W}(x, t), \quad (4.25)$$

Los coeficientes constantes S y K vienen dados por [91]:

$$S = EI + 2GA l_0^2 + \frac{120}{225}GA l_1^2 + GA l_2^2, \quad K = I \left(2Gl_0^2 + \frac{4}{5}Gl_1^2 \right) \quad (4.26)$$

donde los parámetros l_0, l_1 and $l_2 > 0$, introducen el efecto de escala en el modelo.

Nótese que se utiliza aquí una expresión para el parámetro S que difiere ligeramente de la utilizada por Kong et al. [89].

La ecuación (4.25) debe resolverse con las correspondientes condiciones iniciales y de contorno. Como puede observarse, aparece un operador de sexto orden aplicado sobre los desplazamientos transversales $W(x, t)$, por lo que se necesitan seis condiciones de contorno (tres por cada extremo de la viga), es decir es necesario utilizar dos condiciones de contorno naturales no clásicas (una por cada extremo), cuyo significado físico no es intuitivo. En este caso todas las condiciones no clásicas que se derivan de la aplicación del Principio de Hamilton que conduce a la ecuación (4.25), dan lugar a un problema de autovalores autoadjunto, es decir, con autovalores todos reales [96].

4.4. Modelo continuo de gradiente de inercia

4.4.1. Consideraciones generales

Se presenta a continuación un modelo continuo de gradiente de inercia obtenido a partir de expresiones postuladas de las densidades de energía cinética y potencial. La densidad de energía cinética \mathbb{T} se postula a partir de la teoría de Mindlin [24], permitiendo considerar el efecto de escala. La densidad de energía potencial \mathbb{W} es la correspondiente a un material clásico hiperelástico. Esta formulación introduce un único parámetro adicional χ a las constantes elásticas clásicas del material para tener en cuenta el efecto de escala. Este modelo ha sido utilizado previamente para el análisis de vibraciones no lineales axiales [28] y transversales de vigas [29] recogiendo efectos de escala. Dado que esta teoría se va a usar en el capítulo 5 para el análisis de las vibraciones no lineales de cables, se presenta aquí un breve recordatorio de la teoría teniendo en cuenta la presencia de no linealidades geométricas.

Expresión de la densidad de energía potencial

Sean \mathbf{X} y $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ los vectores de posición de una partícula del sólido en las configuraciones inicial y actual, respectivamente. Entonces, el vector desplazamiento $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$ queda definido como

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}. \quad (4.27)$$

El tensor gradiente de deformación $\underline{\underline{\mathbf{F}}}(\mathbf{X}, t)$ se define como

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial (\mathbf{X} + \mathbf{U}(\mathbf{X}, t))}{\partial \mathbf{X}} = \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}}. \quad (4.28)$$

donde $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ es el tensor identidad.

El teorema de descomposición polar [97] permite expresar unívocamente $\underline{\underline{\mathbf{F}}}(\mathbf{X}, t)$ como

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}}(\mathbf{X}, t) = \underline{\underline{\mathbf{R}}}(\mathbf{X}, t) \underline{\underline{\mathbf{U}}}(\mathbf{X}, t) = \underline{\underline{\mathbf{V}}}(\mathbf{X}, t) \underline{\underline{\mathbf{R}}}(\mathbf{X}, t) \quad (4.29)$$

donde $\underline{\underline{\mathbf{U}}}(\mathbf{X}, t)$ y $\underline{\underline{\mathbf{V}}}(\mathbf{X}, t)$ son los tensores de alargamiento derecho e izquierdo, respectivamente, ambos simétricos y definidos positivos, y $\underline{\underline{\mathbf{R}}}(\mathbf{X}, t)$ es el tensor de rotación.

Mediante el teorema de la descomposición espectral, $\underline{\underline{\mathbf{U}}}(\mathbf{X}, t)$ se puede representar como

$$\underline{\underline{\mathbf{U}}}(\mathbf{X}, t) = \sum \lambda_i \underline{\underline{\mathbf{N}}}_i(\mathbf{X}, t) \otimes \underline{\underline{\mathbf{N}}}_i(\mathbf{X}, t) \quad (4.30)$$

donde λ_i y $\underline{\underline{\mathbf{N}}}_i(\mathbf{X}, t)$ son los alargamientos principales y los correspondientes autovectores ortonormales de $\underline{\underline{\mathbf{U}}}(\mathbf{X}, t)$, respectivamente, y \otimes representa el producto diádico.

A partir del tensor de alargamiento derecho $\underline{\underline{\mathbf{U}}}(\mathbf{X}, t)$ se puede construir la familia de tensores de deformación de Seth-Hill $\underline{\underline{\mathbf{E}}}^{(m)}(\mathbf{X}, t)$ [98] mediante las expresión general:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{E}}}^{(m)}(\mathbf{X}, t) &= \frac{1}{m} \sum (\lambda_i^m - 1) \underline{\underline{\mathbf{N}}}_i(\mathbf{X}, t) \otimes \underline{\underline{\mathbf{N}}}_i(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{m} (\underline{\underline{\mathbf{U}}}^m(\mathbf{X}, t) - \mathbf{I}) \quad \text{si } m \neq 0, \\ \underline{\underline{\mathbf{E}}}^{(0)}(\mathbf{X}, t) &= \sum \ln(\lambda_i) \underline{\underline{\mathbf{N}}}_i(\mathbf{X}, t) \otimes \underline{\underline{\mathbf{N}}}_i(\mathbf{X}, t) = \ln(\underline{\underline{\mathbf{U}}}(\mathbf{X}, t)). \end{aligned} \quad (4.31)$$

El superíndice m puede tomar determinados valores enteros dando lugar a diferentes tensores de deformación. Algunas de las expresiones del tensor deformación en función de m son:

- Tensor de deformación de Green-Lagrange ($m = 2$)

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}}^{(2)} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbf{U}}}^2 - \mathbf{I}). \quad (4.32)$$

- Tensores de deformación de Biot ($m = 1$)

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}}^{(1)} = \underline{\underline{\mathbf{U}}} - \mathbf{I}. \quad (4.33)$$

- Tensor de deformación logarítmico ($m = 0$)

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}}^{(0)} = \ln(\underline{\underline{\mathbf{U}}}). \quad (4.34)$$

La densidad de energía de deformación \mathbb{W} de un material hiperelástico asociada al tensor deformación $\underline{\underline{\mathbf{E}}}^{(m)}(\mathbf{X}, t)$ se define como [99]

$$\mathbb{W} = \frac{1}{2} \Lambda (\text{tr} \underline{\underline{\mathbf{E}}}^{(m)}(\mathbf{X}, t))^2 + \mu \underline{\underline{\mathbf{E}}}^{(m)}(\mathbf{X}, t) : \underline{\underline{\mathbf{E}}}^{(m)}(\mathbf{X}, t) \quad (4.35)$$

donde el tensor de tensión conjugado $\underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(m)}(\mathbf{X}, t)$ se obtiene a partir de la energía potencial como

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(m)}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbb{W}}{\partial \underline{\underline{\mathbf{E}}}^{(m)}(\mathbf{X}, t)} = \Lambda(\text{tr} \underline{\underline{\mathbf{E}}}^{(m)}(\mathbf{X}, t)) \underline{\underline{\mathbf{I}}} + 2\mu \underline{\underline{\mathbf{E}}}^{(m)}(\mathbf{X}, t). \quad (4.36)$$

Expresión de la densidad de energía cinética

Para la energía cinética se usa la postulada por Mindlin [24] en su teoría de elasticidad con gradiente, que tiene en cuenta, no solo las velocidades, sino también sus gradientes. A partir de esta teoría la energía cinética queda definida por

$$\mathbb{T} = \frac{1}{2}\rho \left[\frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} + \frac{1}{3} \underline{\underline{\mathbf{l}}}^2 \frac{\partial(\nabla \mathbf{U}(\mathbf{X}, t))}{\partial t} : \frac{\partial(\nabla \mathbf{U}(\mathbf{X}, t))}{\partial t} \right] \quad (4.37)$$

donde $\underline{\underline{\mathbf{l}}}^2$ es un tensor de cuarto orden definido como

$$l_{pkmn}^2 = \frac{1}{2} d_1 \left[\delta_{pm} \delta_{kn} - \delta_{pn} \delta_{km} + 2k_1^2 \delta_{pk} \delta_{mn} + k_2^2 (\delta_{pm} \delta_{kn} + \delta_{pn} \delta_{km}) \right] \quad (4.38)$$

donde d_1 , k_1 y k_2 son parámetros de escala.

La energía cinética debe ser definida positiva y policonvexa para satisfacer los requisitos de los principios termodinámicos. Por ello, se deben cumplir las siguientes condiciones para los citados parámetros de escala

$$d_1^2 > 0, \quad k_2^2 > 0, \quad 3k_1^2 + 2k_2^2 > 0. \quad (4.39)$$

Además, a partir de la teoría de gradiente de Mindlin [21], se puede simplificar aún más el modelo reduciendo el número de parámetros de escala. La energía cinética puede ser postulada mediante un único parámetro de escala χ que tenga en cuenta el efecto de la microestructura. El tensor de parámetros de escala queda entonces definido mediante un único parámetro $l_{pkmn}^2 = 3\chi^2 \delta_{pm} \delta_{kn}$ y la expresión simplificada de la densidad de energía cinética puede formularse como

$$\mathbb{T} = \frac{1}{2}\rho \left[\frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} + \chi^2 \frac{\partial(\nabla \mathbf{U}(\mathbf{X}, t))}{\partial t} : \frac{\partial(\nabla \mathbf{U}(\mathbf{X}, t))}{\partial t} \right]. \quad (4.40)$$

De nuevo, a partir de la definición de los funcionales que representan la energía cinética y de deformación, aplicando el Principio de Hamilton y el Lema Fundamental de Cálculo Variacional se pueden obtener las ecuaciones de gobierno y las condiciones de iniciales y de contorno correspondientes.

4.4.2. Aplicacion a nanoestructuras unidimensionales

Vibraciones no lineales axiales de vigas

En esta sección se presenta brevemente la aplicación de esta teoría general a las vibraciones no lineales axiales de vigas. Como medida de la deformación se utiliza el tensor de deformaciones de Green-Lagrange ($m = 2$) y su correspondiente tensor de tensiones conjugado, el segundo tensor de Piola-Kirchhoff. Los detalles del análisis se pueden encontrar en el trabajo de Vila et al. [28].

En este caso, las expresiones para las energías de deformación \mathbb{W} y cinética \mathbb{T} se escriben respectivamente

$$\mathbb{W} = \frac{1}{2}E \left(U'(X, t) + \frac{1}{2} (U'(X, t))^2 \right)^2, \quad (4.41)$$

$$\mathbb{T} = \frac{1}{2}\rho \left(\left(\dot{U}(X, t) \right)^2 + \chi^2 \left(\dot{U}'(X, t) \right)^2 \right). \quad (4.42)$$

A partir de estas definiciones de las energías cinética y de deformación se pueden obtener la siguiente ecuación de gobierno para los desplazamientos longitudinales de las secciones de la viga $U(X, t)$

$$EU''(X, t) + E \left[\frac{3}{2} (U'(X, t))^2 + \frac{1}{2} (U'(X, t))^3 \right]' + \rho\chi^2 (\ddot{U}(X, t))'' = \rho\ddot{U}(X, t), \quad (4.43)$$

La ecuación (4.43) debe resolverse con las correspondientes condiciones iniciales y de contorno. Como puede observarse, aparecen operadores de segundo orden en la variable espacial X , por lo que se necesitan 2 condiciones de contorno (una por cada extremo de la viga), es decir basta con las condiciones de contorno clásicas para obtener completamente la solución del problema.

La aplicación de esta teoría a la vibración transversal de vigas de Von Karman ha sido desarrollado por Vila et al. [29].

Capítulo 5

Análisis de vibraciones no lineales en cables tensos estructurados

En los últimos años, la industria se ha interesado por la fabricación de nanocables. Estos tienen una amplia aplicación en herramientas de diagnóstico y sistemas electro-mecánicos debido a sus superiores propiedades térmicas, eléctricas, magnéticas y mecánicas. Qin et al. [41] utiliza una estructura híbrida de microfibras y nanocables para absorber la energía vibratoria originada por los pasos, latidos del corazón, sonido ambiente y flujo de aire. En particular, los nanocables piezoeléctricos de óxido de Zinc que se hacen crecen en dirección radial alrededor de fibras textiles se utilizan para convertir vibraciones de baja frecuencia o energía de fricción en electricidad. Kudaibergenov et al. [42] continúa con este estudio y analiza un nanocable compuesto por dos materiales con propiedades mecánicas muy diferentes para absorber la energía debida a vibraciones de baja frecuencia. En este tipo de micro- o nanosistemas, el efecto de escala en el comportamiento mecánico no es despreciable y debe ser considerado en la formulación de los modelos empleados para su análisis y diseño. Consecuentemente, los modelos clásicos continuos no son apropiados para el análisis de nanocables debido a que no capturan el efecto de escala. Por tanto, es necesario recurrir a modelos discretos o continuos generalizados para estudiar los problemas de vibración en dichas nanoestructuras.

En este capítulo se desarrolla un modelo continuo generalizado de un na-

nocable tenso para el estudio del problema de vibraciones no lineales cuando los efectos de escala son relevantes. En el problema de vibraciones, este efecto se produce cuando la longitud de onda de la vibración es del orden del tamaño de la microestructura subyacente. En estas condiciones el modelo clásico no es válido. La utilización de modelos discretos representa una alternativa para el análisis de vibraciones para longitudes de onda corta en comparación con la dimensión característica de la microestructura. Lombardo et al. [100] utiliza un modelo discreto correspondiente a una membrana microestructurada para considerar los efectos de escala en el análisis del comportamiento dinámico lineal. Para el caso de sólidos unidimensionales destaca el trabajo clásico de Fermi et al. [101] para vibraciones axiales. Sin embargo, el gran número de grados de libertad necesarios para definir el problema hace que su resolución sea costosa desde el punto de vista computacional.

Por contra, los modelos continuos generalizados presenta una serie de ventajas sobre los modelos discreto y continuo clásico. Estos incluyen en su formulación parámetros adicionales a los clásicos que permiten tener en cuenta el efecto de escala. Por otra parte, su resolución resulta más eficiente en comparación con los modelos discretos. El modelo continuo generalizado desarrollado en este capítulo, que se denominará *axiomático*, pertenece a los modelos de gradiente de inercia. A diferencia del modelo continuo clásico, el modelo axiomático tiene en cuenta el efecto de escala y, además, permite recuperar las ecuaciones del modelo clásico cuando se anula el parámetro que caracteriza a la microestructura. El modelo de gradiente de inercia ha sido utilizado previamente por Vila et al. [28, 29] para analizar problemas dinámicos de sólidos 1D microestructurados, tales como las vibraciones axiales no lineales en barras o vibraciones axiales y transversales no lineales en vigas. Ambos estudios permitieron concluir que el modelo de gradiente de inercia propuesto reproducía mejor que el modelo clásico el comportamiento del modelo discreto, tomado como referencia, para longitudes de onda corta debido a que su formulación considera el efecto de escala.

En este capítulo se formula en primer lugar el problema de vibraciones no lineales de un cable tenso discreto capaz de reproducir el comportamiento dinámico cuando el efecto de escala es relevante. A continuación se realiza una continualización no estándar de este modelo discreto. Después, se formula el modelo axiomático a partir de formas postuladas de las energías cinética y potencial. Este modelo presenta unas ecuaciones de gobierno que permiten

considerar el efecto de escala mediante un único parámetro adicional. Las ecuaciones de gobierno del modelo axiomático se comparan con aquellas obtenidas a partir de la continualización no estándar de las del modelo discreto, elegido como referencia. Esta comparación permite definir el parámetro adicional del modelo axiomático a partir de los parámetros físicos del problema. Una vez definidas las ecuaciones de gobierno del modelo axiomático, se propone una solución analítica a estas ecuaciones para unas condiciones iniciales y de contorno determinadas. Se comparan los resultados obtenidos para el modelo axiomático con aquellos del modelo discreto, permitiendo su validación. Dicha comparación no es habitual en la literatura y es apropiada para obtener el nivel de concordancia de los resultados con los del discreto cuando los efectos de escala son relevantes. Finalmente, se muestran los resultados para vibraciones de longitud de onda corta para ilustrar la superioridad del modelo axiomático frente al continuo clásico para capturar el efecto de escala.

5.1. Formulación del problema discreto

En esta sección se formula el problema correspondiente a un modelo discreto idealizado de un cable tenso estructurado. Este modelo es elegido como de referencia debido a que reproduce el efecto de escala, y a que permite recuperar el modelo continuo clásico no lineal cuando se continualiza mediante una continualización basada en series de Taylor, como se mostrará posteriormente.

El modelo discreto del cable está compuesto por una cadena de $N + 2$ partículas idénticas de masa M , equidistantes entre sí una distancia d , considerando esta como la longitud característica de la microestructura subyacente. Por tanto, la longitud total de la cadena es $L = (N + 1)d$.

Sea X la coordenada según la dirección del cable y Z la coordenada en dirección transversal al cable (Fig. 5.1). La posición de referencia de la partícula n -ésima es $X_n = (n - 1)d$ y $Z_n = 0$, con $n = 1, 2, \dots, N + 2$. Las partículas vecinas a la n -ésima están unidas a esta mediante muelles lineales de rigidez K . Además, se impone una fuerza de pretensión P_0 en la configuración de referencia del sistema discreto. Los grados de libertad asociados a la partícula n -ésima se corresponden al desplazamiento axial $u_n(t)$ y transversal $w_n(t)$, siendo t el tiempo. El cable se supone biapoyado,

formulándose las siguientes condiciones de contorno

$$u_1(t) = u_{N+2}(t) = 0, \quad (5.1)$$

$$w_1(t) = w_{N+2}(t) = 0. \quad (5.2)$$

Además, se imponen las siguientes condiciones iniciales en el cable

$$u_n(0) = U_0(X_n), \quad \dot{u}_n(0) = 0, \quad (5.3)$$

$$w_n(0) = W_0(X_n), \quad \dot{w}_n(0) = 0, \quad (5.4)$$

siendo U_0 y W_0 funciones continuas evaluadas para los X_n y que satisfacen las condiciones de contorno.

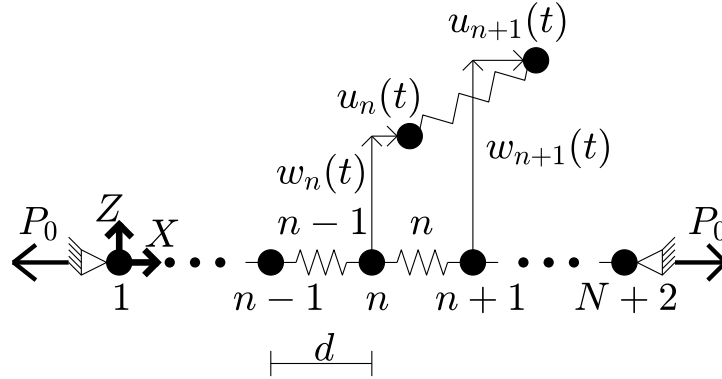


Figura 5.1: Representación del modelo discreto en la configuración de referencia y de dos partículas de la configuración deformada.

La energía cinética $\mathbb{T}_{\text{disc}}^{(n)}$ de la partícula n -ésima y la energía potencial $\mathbb{W}_{\text{disc}}^{(n)}$ del muelle n -ésimo están definidas como

$$\mathbb{T}_{\text{disc}}^{(n)} = \frac{1}{2}M\dot{u}_n^2 + \frac{1}{2}M\dot{w}_n^2, \quad (5.5)$$

$$\mathbb{W}_{\text{disc}}^{(n)} = \frac{1}{2}K\Delta L_n^2 + P_0\Delta L_n, \quad (5.6)$$

donde $(\dot{\bullet})$ representa la derivada temporal y ΔL_n es la elongación del muelle n -ésimo (ver Fig. 5.1), definida como

$$\Delta L_n = \sqrt{(u_{n+1} - u_n + d)^2 + (w_{n+1} - w_n)^2} - d. \quad (5.7)$$

El Lagrangiano del modelo discreto puede escribirse como

$$\mathbb{L}_D = \sum_n \mathbb{T}_{\text{disc}}^{(n)} - \sum_n \mathbb{W}_{\text{disc}}^{(n)}. \quad (5.8)$$

Aplicando el Principio de Hamilton y el Lema Fundamental del Cálculo Variacional [102] se obtiene el sistema de ecuaciones de movimiento de la partícula n -ésima

$$M\ddot{u}_n + (K\Delta L_{n-1} + P_0) \frac{d + u_n - u_{n-1}}{d + \Delta L_{n-1}} - (K\Delta L_n + P_0) \frac{d + u_{n+1} - u_n}{d + \Delta L_n} = 0, \quad (5.9)$$

$$M\ddot{w}_n + (K\Delta L_{n-1} + P_0) \frac{w_n - w_{n-1}}{d + \Delta L_{n-1}} - (K\Delta L_n + P_0) \frac{w_{n+1} - w_n}{d + \Delta L_n} = 0, \quad (5.10)$$

con $n = 1, 2, \dots, N + 2$. La formulación del problema discreto se completa con las condiciones iniciales (5.3) y (5.4).

A continuación se presenta una continualización estándar de las ecuaciones discretas (5.9) y (5.10).

La continualización de los desplazamientos mediante series de Taylor

$$u_{n\pm 1} = u \pm du' + O(d^2), \quad (5.11)$$

$$w_{n\pm 1} = w \pm dw' + O(d^2), \quad (5.12)$$

permite obtener el Lagrangiano continuo clásico aproximado en función de los desplazamientos continuos $u = u(X, t)$ y $w = w(X, t)$

$$\mathbb{L}_{CC} = \int_L \left(\mathbb{T}_{\text{clas}} - \mathbb{W}_{\text{clas}} \right) dX, \quad (5.13)$$

donde

$$\mathbb{T}_{\text{clas}} = \frac{1}{2} \frac{M}{d} \left[\dot{u}^2 + \dot{w}^2 \right], \quad (5.14)$$

$$\mathbb{W}_{\text{clas}} = \frac{1}{2} K d \left(\sqrt{(u' + 1)^2 + w'^2} - 1 \right)^2 + P_0 \left(\sqrt{(u' + 1)^2 + w'^2} - 1 \right). \quad (5.15)$$

Desarrollando \mathbb{W}_{clas} en serie de Taylor hasta potencias cuartas de las derivadas y aplicando de nuevo el Principio de Hamilton, se obtienen las ecuaciones

continuas

$$\ddot{u} - \frac{Kd^2}{M}u'' - \left(\frac{Kd^2}{M} - \frac{P_0d}{M}\right)\frac{\partial}{\partial X}\left[w'^2\left(\frac{1}{2} - u'\right)\right] = 0, \quad (5.16)$$

$$\ddot{w} - \frac{P_0d}{M}w'' - \left(\frac{Kd^2}{M} - \frac{P_0d}{M}\right)\frac{\partial}{\partial X}\left[w'(u' - u'^2 + \frac{1}{2}w'^2)\right] = 0, \quad (5.17)$$

con condiciones de contorno esenciales

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad (5.18)$$

$$w(0, t) = w(L, t) = 0. \quad (5.19)$$

Las condiciones iniciales para el problema continuo clásico se corresponden con

$$u(X, 0) = U_0(X), \quad \dot{u}(X, 0) = 0, \quad (5.20)$$

$$w(X, 0) = W_0(X), \quad \dot{w}(X, 0) = 0. \quad (5.21)$$

Usando las relaciones

$$\frac{Kd^2}{M} = \frac{E}{\rho}, \quad \frac{M}{d} = \rho A \quad (5.22)$$

y $c_1^2 = \frac{E}{\rho}$ y $c_2^2 = \frac{P_0}{\rho A}$, las ecuaciones (5.16) y (5.17) son formalmente idénticas a las ecuaciones de gobierno del modelo continuo clásico de un cable con módulo de Young E , densidad volumétrica ρ y sección transversal A que son (Nayfeh et al. [103])

$$\ddot{u} - c_1^2 u'' - (c_1^2 - c_2^2)\frac{\partial}{\partial x}\left[w'^2\left(\frac{1}{2} - u'\right)\right] = 0, \quad (5.23)$$

$$\ddot{w} - c_2^2 w'' - (c_1^2 - c_2^2)\frac{\partial}{\partial x}\left[w'(u' - u'^2 + \frac{1}{2}w'^2)\right] = 0. \quad (5.24)$$

Este hecho permite corroborar que el modelo discreto considerado es representativo del comportamiento dinámico del cable para el análisis de vibraciones no lineales.

Como se ha comentado anteriormente, el modelo continuo clásico no es válido cuando el efecto de escala es relevante. En la próxima sección se desarrolla una continualización no estándar del problema discreto. De esta forma, se obtienen unas ecuaciones de gobierno que permiten capturar el efecto de escala. La comparación de estas ecuaciones con las del modelo axiomático permitirá definir los parámetros clásicos y de escala de este último a partir de los parámetros físicos del problema.

5.2. Continualización no estándar del problema discreto

En esta sección se desarrolla una continualización no estándar del problema discreto basada en operadores pseudo-diferenciales [104, 26]. Para ello, se utiliza el siguiente operador pseudo-diferencial

$$e^{d\partial_X} = 1 + d\partial_X + \frac{d^2}{2}\partial_X^2 + O(d^3), \quad (5.25)$$

que establece las siguientes relaciones entre desplazamientos de partículas vecinas $u_{n+1} = e^{d\partial_X}u_n$ y $w_{n+1} = e^{d\partial_X}w_n$ ($\partial_X \equiv \frac{\partial}{\partial X}$). Definiendo las variables continuas de desplazamiento axial $u(X, t)$ y transversal $w(X, t)$ tales que sus derivadas se escriben como

$$\frac{\partial u}{\partial X} \equiv u' = \frac{u_{n+1} - u_n}{d}, \quad \frac{\partial w}{\partial X} \equiv w' = \frac{w_{n+1} - w_n}{d}, \quad (5.26)$$

se puede establecer una relación entre las variables discretas y continuas a través de las ecuaciones (5.25) y (5.26) como [26]

$$u_n = \mathbb{Q}u, \quad w_n = \mathbb{Q}w, \quad (5.27)$$

con

$$\mathbb{Q}(\partial_X) = \frac{d\partial_X}{e^{d\partial_X} - 1} = 1 - \frac{d}{2}\partial_X + \frac{d^2}{12}\partial_X^2 + O(d^4).$$

La energía cinética definida por la expresión (5.5) puede expresarse ahora en términos de u y w utilizando las siguientes relaciones propuestas por Rosenau [26]

$$\dot{u}_n^2 = \dot{u}^2 + \frac{d^2}{12}(\dot{u}')^2 + O(d^4), \quad (5.28)$$

$$\dot{w}_n^2 = \dot{w}^2 + \frac{d^2}{12}(\dot{w}')^2 + O(d^4), \quad (5.29)$$

obteniéndose

$$\mathbb{T}_{\text{cont}} = \frac{1}{2} \frac{M}{d} \left[\dot{u}^2 + \frac{d^2}{12}(\dot{u}')^2 + \dot{w}^2 + \frac{d^2}{12}(\dot{w}')^2 \right]. \quad (5.30)$$

La energía potencial definida por la expresión (5.6) puede expresarse en términos de u y w utilizando las relaciones (5.26), obteniéndose

$$\mathbb{W}_{\text{cont}} = \frac{1}{2} K d (\sqrt{(u' + 1)^2 + w'^2} - 1)^2 + P_0 (\sqrt{(u' + 1)^2 + w'^2} - 1). \quad (5.31)$$

El Lagrangiano asociado al modelo obtenido con una continualización no estándar del modelo discreto se escribe como

$$\mathbb{L}_{\text{NS}} = \int_L \left(\mathbb{T}_{\text{cont}} - \mathbb{W}_{\text{cont}} \right) dX. \quad (5.32)$$

Desarrollando \mathbb{W}_{cont} en serie de Taylor hasta potencias cuartas de las derivadas y aplicando el Principio de Hamilton, se obtienen las ecuaciones continualizadas de movimiento del modelo discreto una vez sustituidas las relaciones de parámetros físicos de (5.22)

$$\ddot{u} - \frac{K d^2}{M} u'' - c_1^2 u'' - (c_1^2 - c_2^2) \frac{\partial}{\partial x} \left[w'^2 \left(\frac{1}{2} - u' \right) \right] = 0, \quad (5.33)$$

$$\ddot{w} - \frac{d^2}{12} \ddot{w}'' - c_2^2 w'' - (c_1^2 - c_2^2) \frac{\partial}{\partial x} \left[w' (u' - u'^2 + \frac{1}{2} w'^2) \right] = 0, \quad (5.34)$$

y condiciones de contorno esenciales

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad (5.35)$$

$$w(0, t) = w(L, t) = 0. \quad (5.36)$$

Las condiciones iniciales para el problema continualizado de forma no estándar se corresponden con

$$u(X, 0) = U_0(X), \quad \dot{u}(X, 0) = 0, \quad (5.37)$$

$$w(X, 0) = W_0(X), \quad \dot{w}(X, 0) = 0. \quad (5.38)$$

En la próxima sección se formula el modelo axiomático del cable tenso con microestructura y se obtienen las ecuaciones de gobierno con la presencia de dos parámetros clásicos y un parámetro adicional para considerar el efecto de escala. Estas ecuaciones se compararán con las ecuaciones (5.33) y (5.34) obtenidas a partir de la continualización no estándar para establecer relaciones entre los parámetros del modelo axiomático y los parámetros físicos del problema.

5.3. Modelo continuo axiomático

En esta sección se presenta un modelo continuo generalizado del cable tenso basado en la teoría de gradiente de inercia, presentada en la sección 4.4, con el objetivo de capturar el efecto de escala debido a la microestructura. Este modelo se formula a partir de una energía cinética basada en la teoría de Mindlin [24], enriquecida con los gradientes de velocidad, y una energía potencial clásica basada en los tensores de deformación y de tensión de Biot [98], empleados por Leissa et al. [45] para la formulación del problema continuo clásico del cable tenso.

Sean \mathbf{X} y $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ los vectores de posición de una partícula del sólido en las configuraciones inicial y actual, respectivamente. El vector desplazamiento $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$ puede obtenerse como

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}, \quad (5.39)$$

a partir del cual se expresa el tensor gradiente de deformación

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} = \text{Grad}_{\mathbf{x}}[\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)]. \quad (5.40)$$

El tensor de deformación de Biot $\underline{\underline{\mathbf{e}}}$ se define como [98]

$$\underline{\underline{\mathbf{e}}}(\mathbf{X}, t) = \sqrt{\underline{\underline{\mathbf{F}}}^T \underline{\underline{\mathbf{F}}} - \underline{\underline{\mathbf{I}}}}. \quad (5.41)$$

A continuación se postulan los funcionales de las densidades de energía cinética y potencial.

La *densidad de energía cinética* está basada en la teoría de Mindlin [24] que tiene en cuenta el efecto de escala asociado a la microestructura subyacente del problema. Con este objetivo, la teoría introduce un término adicional en la densidad de energía cinética clásica dependiente del gradiente de la velocidad. Este término incluye un parámetro χ para tener en cuenta el efecto de escala. La densidad de energía cinética resulta

$$\mathbb{T}_{\text{axiom}} = \frac{1}{2}\rho \left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \chi^2 \frac{\partial(\nabla \mathbf{U})}{\partial t} : \frac{\partial(\nabla \mathbf{U})}{\partial t} \right], \quad (5.42)$$

donde ρ es la densidad volumétrica y $‘:’$ es el producto contraído.

La *densidad de energía potencial* está definida a partir del tensor de deformación de Biot y la energía potencial introducida por la pretensión

$$\mathbb{W}_{\text{axiom}} = \frac{1}{2}\Lambda(\text{tr}\underline{\underline{\mathbf{e}}})^2 + \mu\underline{\underline{\mathbf{e}}} : \underline{\underline{\mathbf{e}}} + \underline{\underline{\mathbf{T}}}_0 : \underline{\underline{\mathbf{e}}}, \quad (5.43)$$

donde Λ y μ son las constantes de Lamé, y $\underline{\underline{\mathbf{T}}}_0$ el tensor de pretensión. El tensor de tensión de Biot $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ queda definido como [105]

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbb{W}_{\text{axiom}}}{\partial \underline{\underline{\mathbf{e}}}(\mathbf{X}, t)} = \Lambda(\text{tr}\underline{\underline{\mathbf{e}}}(\mathbf{X}, t))\underline{\underline{\mathbf{I}}} + 2\mu\underline{\underline{\mathbf{e}}}(\mathbf{X}, t) + \underline{\underline{\mathbf{T}}}_0. \quad (5.44)$$

Utilizando las anteriores expresiones Leissa et al. [45] obtiene la deformación de Biot para el caso de un cable unidimensional como

$$\mathbf{e} = \sqrt{(1 + u')^2 + w'^2} - 1. \quad (5.45)$$

Las densidades de energía cinética y potencial del modelo continuo axiomático resultan

$$\mathbb{T}_{\text{axiom}} = \frac{1}{2}\rho \left[\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \chi^2(\dot{u}'^2 + \dot{w}'^2) \right], \quad (5.46)$$

$$\mathbb{W}_{\text{axiom}} = \frac{1}{2}E\mathbf{e}^2 + \frac{P_0}{A}\mathbf{e}. \quad (5.47)$$

Por tanto, el Lagrangiano del modelo continuo axiomático se obtiene como

$$\mathbb{L}_{\text{AX}} = \int_L \left(\mathbb{T}_{\text{axiom}} - \mathbb{W}_{\text{axiom}} \right) dX. \quad (5.48)$$

Desarrollando $\mathbb{W}_{\text{axiom}}$ en serie de Taylor hasta potencias cuartas de las derivadas y aplicando el Principio de Hamilton, se obtienen las ecuaciones de gobierno del desplazamiento axial u y transversal w

$$\ddot{u} - \chi^2 \ddot{u}'' - c_1^2 u'' - \left(c_1^2 - c_2^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \left[w'^2 \left(\frac{1}{2} - u' \right) \right] = 0, \quad (5.49)$$

$$\ddot{w} - \chi^2 \ddot{w}'' - c_2^2 w'' - \left(c_1^2 - c_2^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \left[w'(u' - u'^2 + \frac{1}{2}w'^2) \right] = 0, \quad (5.50)$$

así como condiciones contorno esenciales

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad (5.51)$$

$$w(0, t) = w(L, t) = 0. \quad (5.52)$$

Las condiciones iniciales se corresponden a

$$u(X, 0) = U_0(X), \quad \dot{u}(X, 0) = 0, \quad (5.53)$$

$$w(X, 0) = W_0(X), \quad \dot{w}(X, 0) = 0. \quad (5.54)$$

Las ecuaciones de gobierno (5.49) y (5.50) incluyen el parámetro de escala χ y, por tanto, tiene en cuenta su efecto. Para $\chi = 0$, se recuperan las ecuaciones continuas clásicas del cable no lineal tenso propuestas por Nayfeh et al. [103], recogidas en las ecuaciones (5.23) y (5.24).

Si se comparan las ecuaciones continualizadas (5.33) y (5.34) y axiomáticas (5.49) y (5.50), se puede observar que ambas ecuaciones son formalmente idénticas cuando

$$\frac{d^2}{12} = \chi^2. \quad (5.55)$$

Por tanto, esta relación junto con las de la ecuación (5.22) establecen una conexión entre los parámetros discretos y continuos. En particular, el parámetro de escala χ se obtiene a partir de la longitud característica de la microestructura d . Esto permite determinar χ a partir de un parámetro físico del problema, evitando su calibración por ajuste de los resultados derivados del discreto de referencia.

5.3.1. Simplificación del modelo para cables de rigidez elevada

Para el modelo clásico, Nayfeh et al. [44] y Anand et al. [43] mostraron la existencia de interacciones entre los modos de vibración axial y transversal. El modo i -ésimo axial interacciona con el j -ésimo transversal cuando $ic_1 \approx 2jc_2$. Para el caso $c_2^2/c_1^2 = P_0/EA \ll 1$, que se corresponde con un cable cuya rigidez EA es mucho mayor que la fuerza de pretensión P_0 , y considerando modos transversales de bajo orden, esta interacción no está presente y la inercia axial \ddot{u} es despreciable (Nayfeh et al. [44]). Siguiendo un razonamiento similar en el caso del modelo axiomático, la ecuación (5.49) puede aproximarse como

$$u'' = -\frac{\partial}{\partial X} \left[w'^2 \left(\frac{1}{2} - u' \right) \right]. \quad (5.56)$$

Integrando la ecuación (5.56) dos veces y considerando $w'^2 \ll 1$ y $u(0, t) = u(L, t) = 0$, se obtiene

$$u = \frac{X}{2L} \int_0^L w'^2 dX - \frac{1}{2} \int_0^X w'^2 dX. \quad (5.57)$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación (5.57) en (5.50), despreciando c_2^2 en comparación a c_1^2 y manteniendo potencias cúbicas de w , se obtiene la ecuación de movimiento transversal del cable

$$\ddot{w} - \chi^2 \ddot{w}'' - c_2^2 w'' - \frac{c_1^2}{2L} w'' \int_0^L w'^2 dX = 0. \quad (5.58)$$

Obsérvese que la ecuación (5.58) tiene en consideración el efecto de escala mediante el parámetro χ . Para $\chi = 0$, se recupera la correspondiente ecuación continua clásica no lineal tras considerar las anteriores hipótesis [103, 44, 43].

El movimiento transversal del cable puede, por tanto, obtenerse de forma independiente mediante la ecuación (5.58), y el movimiento axial queda determinado a partir de este mediante la ecuación (5.57).

Más adelante se obtiene la solución de las ecuaciones de gobierno del modelo discreto y de los continuos clásico y axiomático. Además, se compara la solución obtenida a partir de cada modelo continuo para vibraciones de diferente longitud de onda, mostrando el grado de aproximación a la solución del modelo discreto, considerado como referencia. Antes de este análisis de vibraciones no lineales se presenta en la siguiente sección el comportamiento dispersivo de las versiones linealizadas de los modelos discreto, continuo clásico y axiomático. Como se ha explicado, el modelo continuo clásico es válido cuando la longitud de onda es mucho mayor que el tamaño de la microestructura. Este efecto se evidencia en la coincidencia de las relaciones de dispersión del modelo discreto y del continuo clásico para números de onda reducidos. La concordancia de la curva de dispersión del modelo axiomático linealizado a la correspondiente del modelo discreto permite obtener información previa de la validez del modelo propuesto para el régimen no lineal.

5.4. Comparación de los modelos linealizados

En esta sección se analizan las curvas de dispersión de las versiones linealizadas de los modelos discreto, continuo clásico y continuo axiomático.

Las ecuaciones de gobierno linealizadas del modelo discreto son

$$M\ddot{u}_n - K(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) = 0, \quad (5.59)$$

$$M\ddot{w}_n - \frac{P_0}{d}(w_{n+1} - 2w_n + w_{n-1}) = 0, \quad (5.60)$$

que, como puede observarse, están desacopladas. Si se impone una solución de onda plana con número de onda κ y frecuencia angular ω a las ecuaciones (5.59) y (5.60), las relaciones de dispersión resultan

$$\omega_{\text{axial}}^2 = \frac{2K}{M}[1 - \cos(\kappa d)], \quad (5.61)$$

$$\omega_{\text{trans}}^2 = \frac{2P_0}{Md}[1 - \cos(\kappa d)]. \quad (5.62)$$

Las ecuaciones de gobierno del modelo continuo clásico linealizado se obtienen a partir del desarrollo de $u_{n\pm 1}$ y $w_{n\pm 1}$ en serie de Taylor

$$u_{n\pm 1} = u \pm du' + \frac{1}{2}d^2u'' + O(d^3), \quad (5.63)$$

$$w_{n\pm 1} = w \pm dw' + \frac{1}{2}d^2w'' + O(d^3), \quad (5.64)$$

en las ecuaciones (5.59) y (5.60), dando lugar a

$$\ddot{u} - c_1^2 u'' = 0, \quad (5.65)$$

$$\ddot{w} - c_2^2 w'' = 0, \quad (5.66)$$

o, alternativamente, eliminando términos no lineales de las ecuaciones (5.16) y (5.17). Si se impone una solución de onda plana en las ecuaciones (5.65) y (5.66), las relaciones de dispersión resultan

$$\omega_{\text{axial}}^2 = c_1^2 \kappa^2, \quad (5.67)$$

$$\omega_{\text{trans}}^2 = c_2^2 \kappa^2. \quad (5.68)$$

El modelo continuo axiomático linealizado se obtiene conservando los términos lineales de las ecuaciones (5.49) y (5.50). Por tanto, las ecuaciones de gobierno son

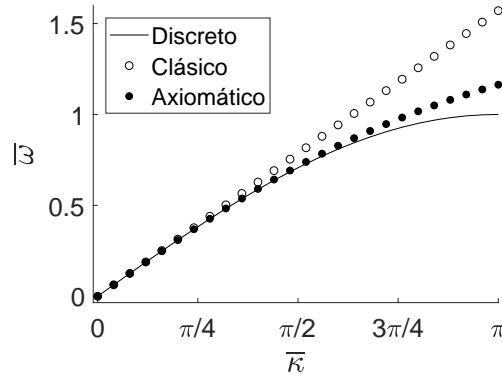
$$\ddot{u} - \chi^2 \ddot{u}'' - c_1^2 u'' = 0, \quad (5.69)$$

$$\ddot{w} - \chi^2 \ddot{w}'' - c_2^2 w'' = 0. \quad (5.70)$$

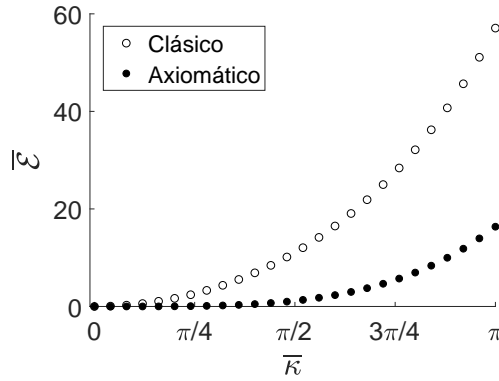
Imponiendo una solución de onda plana, se obtienen las siguientes relaciones de dispersión

$$\omega_{\text{axial}}^2 = \frac{c_1^2 \kappa^2}{1 + \chi^2 \kappa^2}, \quad (5.71)$$

$$\omega_{\text{trans}}^2 = \frac{c_2^2 \kappa^2}{1 + \chi^2 \kappa^2}. \quad (5.72)$$



(a)



(b)

Figura 5.2: Modelos linealizados (axial y transversal): (a) Curvas de dispersión, (b) Diferencia en frecuencia entre los modelos continuos y discreto.

La figura 5.2 muestra las características dispersivas de los tres modelos linealizados. La figura 5.2a muestra las curvas de dispersión para los desplazamientos tanto axiales como transversales, donde la frecuencia y el número

de onda se han adimensionalizado con

$$\bar{\omega} = \omega/\omega_0, \quad \bar{\kappa} = \kappa d, \quad (5.73)$$

ω_0 se corresponde con las respectivas frecuencias de referencia

$$\omega_{0,\text{axial}} = \sqrt{\frac{4K}{M}} = \frac{2c_1}{d}, \quad \omega_{0,\text{trans}} = \sqrt{\frac{4P_0}{Md}} = \frac{2c_2}{d}. \quad (5.74)$$

La figura 5.2b representa la diferencia relativa entre las frecuencias correspondientes a los modelos continuos y discreto, calculada como

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{\bar{\omega}_{\text{Continuo}} - \bar{\omega}_{\text{Discreto}}}{\bar{\omega}_{\text{Discreto}}} \times 100. \quad (5.75)$$

Puede observarse que el modelo continuo clásico resulta válido en el rango de longitudes de onda larga. Cuando $\bar{\kappa}$ aumenta, la diferencia en frecuencia con el modelo discreto comienza a ser significativa. Por ejemplo, para el número de onda $\bar{\kappa} = \pi/2$, existe una diferencia $\bar{\mathcal{E}} \approx 11\%$. Por otra parte, el modelo axiomático captura fielmente la curva del discreto hasta $\bar{\kappa} = \pi/2$ ($\bar{\mathcal{E}} \approx 1\%$). A partir de este número de onda, el modelo axiomático ofrece una mejor aproximación del modelo discreto en comparación al clásico. A pesar de los buenos resultados al utilizar el modelo continuo axiomático, es necesario resaltar que estos se corresponden al problema lineal y, aunque pueda haber similitudes, pueden verse modificados en el régimen no lineal.

5.5. Solución de las ecuaciones de gobierno no lineales

En esta sección se presentan las metodologías para obtener la solución de las ecuaciones de gobierno de los modelos discreto y continuo axiomático. Las ecuaciones del modelo discreto se obtienen utilizando el algoritmo de Verlet con velocidad [106], mientras que para el axiomático se utiliza el Método de Galerkin. La función temporal de la solución de Galerkin se resuelve mediante dos métodos: el primero, basado en las funciones elípticas de Jacobi, permite obtener una solución analítica, mientras que el segundo, basado en métodos perturbativos, conduce a una solución aproximada pero cerrada.

5.5.1. Modelo discreto

Se utiliza el algoritmo de Verlet para resolver las ecuaciones de gobierno del problema discreto definido en la sección 5.1. El modelo discreto está compuesto por $N + 2$ partículas y el movimiento de cada partícula está definido por las ecuaciones (5.9) y (5.10), por tanto, el sistema de ecuaciones de gobierno está compuesto por $2 \times (N + 2)$ ecuaciones no lineales.

El algoritmo de Verlet actualiza los desplazamientos axial $u_n(t)$ y transversal $w_n(t)$ de la partícula n -ésima según las expresiones

$$u_n(t + \Delta t) = u_n(t) + \dot{u}_n(t)\Delta t + \frac{1}{2} \frac{F_n^u(t)}{M} \Delta t^2 + \mathcal{E}(O(\Delta t^3)), \quad (5.76)$$

$$w_n(t + \Delta t) = w_n(t) + \dot{w}_n(t)\Delta t + \frac{1}{2} \frac{F_n^w(t)}{M} \Delta t^2 + \mathcal{E}(O(\Delta t^3)), \quad (5.77)$$

donde Δt es el incremento de tiempo, $F_n^u(t)$ y $F_n^w(t)$ son las fuerzas actuando en la partícula n -ésima en dirección axial y transversal, respectivamente, cuyas expresiones se obtienen a partir de las ecuaciones (5.9) y (5.10)

$$F_n^u(t) = -(K\Delta L_{n-1} + P_0) \frac{d + u_n - u_{n-1}}{d + \Delta L_{n-1}} + (K\Delta L_n + P_0) \frac{d + u_{n+1} - u_n}{d + \Delta L_n}, \quad (5.78)$$

$$F_n^w(t) = -(K\Delta L_{n-1} + P_0) \frac{w_n - w_{n-1}}{d + \Delta L_{n-1}} + (K\Delta L_n + P_0) \frac{w_{n+1} - w_n}{d + \Delta L_n}, \quad (5.79)$$

y $\mathcal{E}(O(\Delta t^3))$ es el error numérico obtenido al aplicar el algoritmo. Se ha considerado un incremento de tiempo Δt adecuado para asegurar la estabilidad de la solución.

Las frecuencias de las vibraciones axial y transversal de la partícula n -ésima se pueden calcular a partir de la Transformada Rápida de Fourier [107] de $u_n(t)$ y $w_n(t)$, respectivamente.

Los resultados del modelo discreto se presentarán en forma adimensional, en acuerdo con la adimensionalización que se adopta a continuación para el modelo axiomático.

5.5.2. Modelo axiomático

A continuación se resuelven las ecuaciones (5.57) y (5.58) mediante el Método de Galerkin. Para ello, se van a utilizar las siguientes variables adimensionales

$$\varepsilon = \frac{c_2^2}{c_1^2} \ll 1, \quad \bar{u} = \frac{u}{\varepsilon L}, \quad \bar{w} = \frac{w}{\varepsilon L}, \quad \xi = \frac{X}{L}, \quad (5.80)$$

$$\tau = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \frac{c_2}{L}, \quad h = \frac{\chi}{L}, \quad (5.81)$$

en las ecuaciones (5.57) y (5.58) y se considera en lo que sigue $(\dot{\bullet}) \equiv \frac{\partial}{\partial \tau}$ y $(\bullet)' \equiv \frac{\partial}{\partial \xi}$.

La ecuación (5.58) se transforma en

$$\ddot{\bar{w}} - h^2 \ddot{\bar{w}}'' - \bar{w}'' - \varepsilon \frac{\bar{w}''}{2} \int_0^1 \bar{w}'^2 d\xi = 0, \quad (5.82)$$

con condiciones de contorno

$$\bar{w}(0, \tau) = \bar{w}(1, \tau) = 0, \quad (5.83)$$

y condiciones iniciales

$$\bar{w}(\xi, 0) = \bar{w}_0(\xi), \quad \dot{\bar{w}}(\xi, 0) = 0, \quad (5.84)$$

donde $\bar{w}_0(\xi)$ se corresponde al desplazamiento transversal inicial adimensional.

Se propone la siguiente solución para la ecuación (5.82)

$$\bar{w}(\xi, \tau) = \sum_j q_j(\tau) \phi_j(\xi), \quad (5.85)$$

donde $q_j(\tau)$ son funciones incógnita dependientes del tiempo que han de ser determinadas y $\phi_j(\xi)$ son funciones base que satisfacen las condiciones de contorno, elegidas aquí como

$$\phi_j(\xi) = \sin(\Omega_j \xi), \quad (5.86)$$

con $\Omega_j = j\pi$ ($j = 1, 2, \dots$).

Aplicando el método de Galerkin a la ecuación (5.82) se obtiene

$$\sum_j \int_0^1 \phi_p \left[\ddot{q}_j \phi_j - h^2 \ddot{q}_j \phi_j'' - q_j \phi_j'' - \varepsilon \frac{q_j \phi_j''}{2} \left(\sum_l \sum_k q_l q_k \int_0^1 \phi_l' \phi_k' d\xi \right) \right] d\xi = 0 \quad (5.87)$$

donde se puede observar que todos los términos del sumatorio son nulos salvo el correspondiente a $j = p$ debido a la ortogonalidad de las funciones ϕ_j , es decir,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi_p \phi_j d\xi &= \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq p \\ \frac{1}{2} & \text{si } j = p \end{cases} \\ \int_0^1 \phi_p \phi_j'' d\xi &= \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq p \\ -\frac{\Omega_p^2}{2} & \text{si } j = p \end{cases} \\ \int_0^1 \phi_p' \phi_j' d\xi &= 0 = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq p \\ \frac{\Omega_p^2}{2} & \text{si } j = p \end{cases} \end{aligned}$$

Sustituyendo estas relaciones en (5.87), el sistema se reduce a

$$(1 + h^2 \Omega_p^2) \ddot{q}_p + \Omega_p^2 (1 + \varepsilon \frac{\Omega_p^2}{4} \sum_l q_l^2) q_p = 0, \quad (5.88)$$

con condiciones iniciales

$$q_p(0) = 2 \int_0^1 \bar{w}_0(\xi) \phi_p(\xi) d\xi, \quad (5.89)$$

y

$$\dot{q}_p(0) = 0. \quad (5.90)$$

En el caso de que la condición inicial de desplazamiento sea

$$\bar{w}_0(\xi) = q_0 \sin(c\pi\xi), \quad (5.91)$$

siendo esta monocromática, con número de onda $\Omega_c = c\pi$ y amplitud máxima q_0 , entonces el vector de condiciones iniciales definido en la ecuación (5.89) tiene todas sus componentes nulas excepto la correspondiente a $p = c$. Por tanto, el sistema (5.88) se reduce a una única ecuación

$$\ddot{q} + \alpha q + \varepsilon \frac{\alpha \Omega^2}{4} q^3 = 0, \quad (5.92)$$

con

$$\alpha = \frac{\Omega^2}{1 + h^2 \Omega^2}, \quad (5.93)$$

y condiciones iniciales

$$q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = 0, \quad (5.94)$$

donde el subíndice c se ha suprimido. Si $h = 0$, la expresión deriva en la ecuación (5.92) de la función temporal referida al modelo continuo clásico.

La expresión (5.92) se corresponde a la ecuación de Duffing no forzada y sin amortiguamiento [108]. La solución analítica de la ecuación de Duffing con condiciones iniciales $q(0) = q_0$ y $\dot{q}(0) = 0$ puede obtenerse a partir de

$$q(\tau) = q_0 \text{cn} \left(\sqrt{\alpha + \beta q_0^2} \tau, \sqrt{\frac{\beta q_0^2}{2(\alpha + \beta q_0^2)}} \right), \quad (5.95)$$

con $\beta = \varepsilon \frac{\alpha \Omega^2}{4}$ y $\alpha + \beta q_0^2 \neq 0$ y $\text{cn}(\bullet, \bullet)$ la función elíptica coseno de Jacobi definida como [109]

$$\text{cn}(\eta, m) = \cos \varphi, \quad (5.96)$$

donde

$$\eta = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \theta}}. \quad (5.97)$$

La frecuencia adimensional $\bar{\omega}$ de $q(\tau)$ se obtiene mediante

$$\bar{\omega} = 2\pi/\mathcal{T}, \quad (5.98)$$

donde el periodo adimensional \mathcal{T} está definido por la expresión

$$\mathcal{T} = \frac{4}{\sqrt{\alpha + \beta q_0^2}} \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m_t^2 \sin^2 \theta}} \quad (5.99)$$

con

$$m_t = \frac{\beta q_0^2}{2(\alpha + \beta q_0^2)}. \quad (5.100)$$

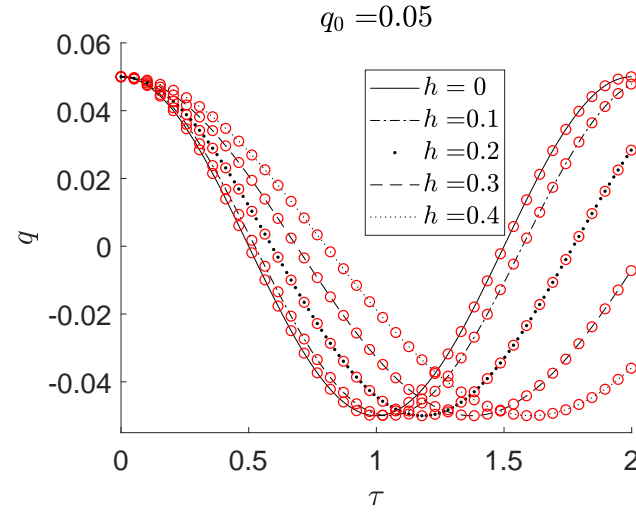
Por otra parte, se ha utilizado un método perturbativo para obtener una solución cerrada de la ecuación de Duffing (5.92) con condiciones iniciales $q(0) = q_0$ y $\dot{q}(0) = 0$. Para ello, se ha utilizado el método de Múltiples Escalas [110] (ver Apéndice 7.3), obteniéndose la expresión cerrada de la función temporal de la solución (5.85)

$$q(\tau) = q_0 \cos(\bar{\omega}\tau) + \varepsilon \frac{q_0^3 \Omega^2}{128} \cos(3\bar{\omega}\tau), \quad (5.101)$$

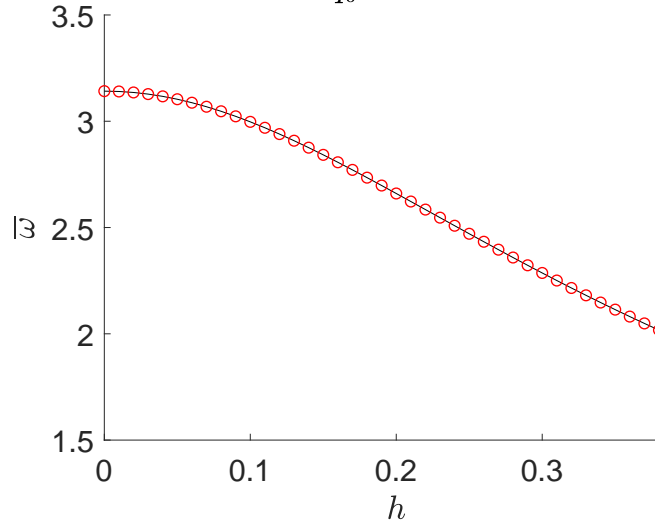
siendo $\bar{\omega}$ la frecuencia adimensional definida como

$$\bar{\omega} = \sqrt{\alpha} \left(1 + \varepsilon \frac{3\Omega^2}{32} q_0^2 \right). \quad (5.102)$$

Cabe destacar que la función temporal $q(\tau)$ recoge la influencia del efecto de escala a través del parámetro adimensional h . La figura 5.3 muestra esta influencia en la función $q(\tau)$, que se ha calculado tanto a partir de la solución analítica **, como de la aproximación perturbativa **. Se han considerado los siguientes valores para los parámetros del problema: $\Omega = \pi$, $\varepsilon = 0.002$, $q_0 = 0.05$ y cinco valores diferentes de $h = 0, 0.1, 0.2, 0.3$ y 0.4 ($h = 0$, corresponde a la solución del modelo continuo clásico). Se puede observar que el semiperiodo de la función temporal $q(\tau)$ aumenta con h , con la consiguiente disminución de $\bar{\omega}$. Esta tendencia se muestra más claramente en la figura 5.3b para el intervalo $h \in [0, 0.4]$, en la que la frecuencia $\bar{\omega}$ se ha obtenido a partir de las expresiones (5.98) (solución analítica) y (5.102) (solución perturbativa). Cabe destacar que ambas soluciones, analítica y perturbativa, proporcionan los mismos resultados.



(a)
 $q_0 = 0.05$



(b)

Figura 5.3: Solución analítica (línea) y perturbativa (o) del modelo continuo axiomático. Influencia del parámetro h : (a) Función temporal q versus tiempo adimensional τ , (b) Frecuencia adimensional $\bar{\omega}$ versus parámetro h .

En cuanto al desplazamiento axial, la forma adimensional de la ecuación

(5.57) resulta

$$\bar{u}(\xi, \tau) = \frac{\varepsilon}{2} \xi \int_0^1 \bar{w}'^2 d\xi - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^\xi \bar{w}'^2 d\xi, \quad (5.103)$$

que se corresponde a la ecuación de gobierno del desplazamiento axial adimensional, obtenida a partir de la transversal. Si el desplazamiento transversal \bar{w} está definido como vibración monocromática

$$\bar{w}(\xi, \tau) = q(\tau) \sin(\Omega\xi), \quad (5.104)$$

la ecuación del desplazamiento axial adimensional (5.103) se reduce a

$$\bar{u}(\xi, \tau) = -\frac{\Omega}{8} \varepsilon q(\tau)^2 \left(\sin(2\Omega\xi) - \xi \sin(2\Omega) \right). \quad (5.105)$$

En la ecuación (5.105), $q(\tau)$ se corresponde con la expresión obtenida bien con las funciones elípticas de Jacobi (Ec. (5.95)), bien mediante el método perturbativo (Ec. (5.101)). Igualmente, las condiciones iniciales para el movimiento axial quedan establecidas a partir de las correspondientes del movimiento transversal. La condición inicial del desplazamiento axial se obtiene de sustituir la condición inicial del desplazamiento transversal (5.91) en (5.103), obteniéndose

$$\bar{u}_0(\xi) = -\frac{\Omega}{8} \varepsilon q_0^2 \left(\sin(2\Omega\xi) - \xi \sin(2\Omega) \right), \quad (5.106)$$

y la condición inicial para la velocidad en dirección axial es

$$\dot{\bar{u}}(\xi, 0) = 0. \quad (5.107)$$

En la próxima sección se compara la evolución temporal de los desplazamientos de los modelos discreto y continuos para diferentes valores de amplitud inicial q_0 y de longitudes de onda. Se muestra cómo el modelo axiomático captura del efecto de escala cuando este es relevante, a diferencia del modelo continuo clásico. La solución a las ecuaciones de gobierno de este último modelo se corresponden a las obtenidas en esta sección para el modelo axiomático cuando $h = 0$.

5.6. Análisis de los resultados

En esta sección se comparan los resultados obtenidos a partir de los tres modelos estudiados: continuo clásico, continuo axiomático y discreto, considerando este último como referencia.

Se ha impuesto como condición inicial un desplazamiento transversal de las partículas de la cadena de forma sinusoidal de longitud de onda λ , compatible con las condiciones de contorno. Para ello se exige que se cumpla la siguiente relación

$$r \frac{\lambda}{2} = (N + 1)d \quad (5.108)$$

siendo r un número entero, $r > 1$. El número de onda adimensional $\bar{\kappa}$ queda definido como

$$\bar{\kappa} = \frac{r\pi}{N + 1}. \quad (5.109)$$

Debido a que el número de onda se restringe a la PZB, $\bar{\kappa} \in [0, \pi)$, el sólido debe estar constituido por un número de partículas, tal que $N + 1 > r$. El parámetro de escala adimensional h puede asimismo expresarse en función de N como

$$h = \frac{d}{\sqrt{12}L} = \frac{1}{\sqrt{12}(N + 1)}. \quad (5.110)$$

Por tanto, para un valor de r reducido y modificando el número de partículas N , se puede modificar simultáneamente el número de onda $\bar{\kappa}$ y el parámetro adimensional de longitud de escala h . Un elevado número de partículas será representativo de un problema con escasa influencia del efecto de escala, mientras que un número reducido de estas permitirá estudiar casos fuertemente influenciados por este efecto.

Una vez definido el problema, se presentan a continuación los valores elegidos de los parámetros para la presentación de los resultados.

Considérese una cadena de longitud $L = (N+1)d$ tal que $L = 3\frac{\lambda}{2}$ ($r = 3$). El número de onda adimensional queda entonces definido como

$$\bar{\kappa} = \frac{3\pi}{N+1}, \quad (5.111)$$

y el número de partículas debe cumplir $N > 2$. Se van a estudiar los casos en que N toma los siguientes valores

$$N = [23, 11, 5, 3]. \quad (5.112)$$

Los números de onda y parámetros de escala adimensionales toman los correspondientes valores

$$\bar{\kappa} = [\pi/8, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4], \quad (5.113)$$

$$h = [0.012, 0.024, 0.048, 0.072]. \quad (5.114)$$

La figura 5.4 muestra la cadena para los diferentes valores de N con la correspondiente condición inicial de la vibración transversal

$$w_n(0) = W_0(X_n) = \varepsilon L q_0 \sin\left(\frac{3\pi}{L} X_n\right), \quad (5.115)$$

$$\dot{w}_n(0) = 0. \quad (5.116)$$

Las condiciones iniciales para la vibración axial, congruentes con las transversales mediante la expresión (5.106), se definen como

$$u_n(0) = U_0(X_n) = -\frac{3\pi}{8} \varepsilon^2 L q_0^2 \sin\left(\frac{6\pi}{L} X_n\right), \quad (5.117)$$

$$\dot{u}_n(0) = 0. \quad (5.118)$$

Además, los resultados se mostrarán para diferentes valores de la amplitud del desplazamiento inicial q_0 para evidenciar la influencia de la no linealidad en el comportamiento de la cadena

$$q_0 = [0.05, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5]. \quad (5.119)$$

En todos los casos se tomará un valor de $\varepsilon = c_2^2/c_1^2 = 0.002$. El modelo discreto así definido se considera como referencia. En relación al modelo

axiomático, de acuerdo con las expresiones (5.115) y (5.116) las condiciones iniciales para la vibración transversal del modelo axiomático son

$$\bar{w}_0(\xi) = q_0 \sin(3\pi\xi), \quad (5.120)$$

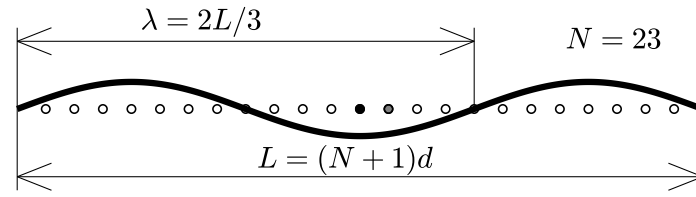
$$\dot{\bar{w}}(\xi, 0) = 0. \quad (5.121)$$

Estas relaciones determinan, mediante la ecuación (5.106), las condiciones iniciales para la vibración axial

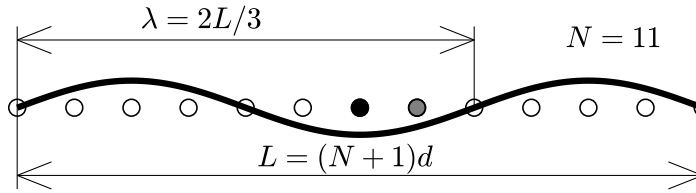
$$\bar{u}_0(\xi) = -\frac{3\pi}{8}\varepsilon q_0^2 \sin(6\pi\xi), \quad (5.122)$$

$$\dot{\bar{u}}(\xi, 0) = 0. \quad (5.123)$$

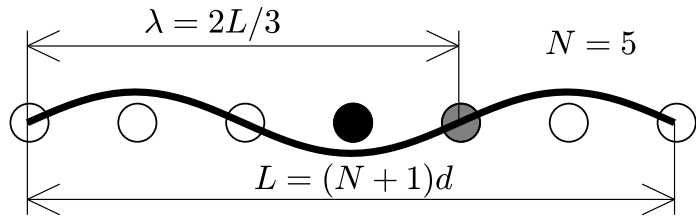
A continuación se muestra la función temporal de las soluciones de los problemas discreto y axiomático, obtenidas mediante la metodología desarrollada en la sección 5.5. A su vez, se presenta la función temporal correspondiente al modelo continuo clásico para demostrar cómo el axiomático permite obtener una mejor aproximación que con el clásico. El análisis se centra en el desplazamiento transversal, sin embargo también se analizarán al finalizar la sección los resultados relacionados con el desplazamiento axial.



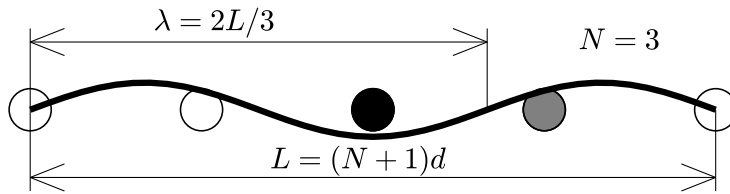
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.4: Modelo discreto. Esquema con problemas equivalentes y desplazamientos transversales iniciales: (a) $N = 23$, (b) $N = 11$, (c) $N = 5$ y (d) $N = 3$. En negro, la partícula central y en gris, la partícula contigua de la derecha.

5.6.1. Análisis del desplazamiento transversal

Las figuras 5.5-5.8 muestran, para diferentes valores de N y, por tanto, de h y $\bar{\kappa}$, la evolución temporal del desplazamiento adimensional transversal de la partícula central ($n = \frac{N+3}{2}$, Fig. 5.4) del modelo discreto, así como $\xi = 1/2$, punto correspondiente a la partícula central para los modelos continuos. Para el modelo discreto, la evolución temporal del desplazamiento transversal se obtiene a partir de la ecuación (5.77). Para el modelo axiomático, la función temporal está definida por la solución de la ecuación de Duffing bien en forma analítica (5.95), bien por la solución perturbativa (5.101).

La figura 5.5 muestra los resultados para $N = 23$, y para diferentes valores de la amplitud del desplazamiento inicial q_0 . Este estudio se corresponde al número de onda $\bar{\kappa} = \pi/8$ y parámetro de escala $h = 0.012$. Como se adelantó para el régimen lineal, para valores de número de onda reducidos ($\bar{\kappa} < \pi/8$), el efecto de escala es prácticamente despreciable y el modelo continuo clásico es capaz de capturar el desplazamiento del modelo discreto. Para valores de $N > 23$, se ha comprobado que el efecto de escala es irrelevante y no existen diferencias entre los diferentes modelos.

Las figuras 5.6-5.8 muestran el desplazamiento adimensional para $N = [11, 5, 3]$. Cuando N disminuye, la longitud de onda se reduce y el efecto de escala comienza a jugar un papel relevante. Para $N = 11$ (Fig. 5.6) comienzan a aparecer diferencias apreciables entre los modelos clásico y discreto. Sin embargo, el modelo axiomático es capaz de capturar el desplazamiento del modelo discreto. Para $N = 5$ (Fig. 5.7) existen diferencias significativas del desplazamiento adimensional entre los modelos clásico y discreto. No obstante, se obtiene una buena aproximación con el modelo axiomático, para cualquier valor de q_0 . Para $N = 3$, $\bar{\kappa} = 3\pi/4$ (Fig. 5.8) ninguno de los modelos continuos es capaz de recuperar los resultados del modelo discreto. Sin embargo, el axiomático proporciona una mejor aproximación que el modelo continuo clásico.

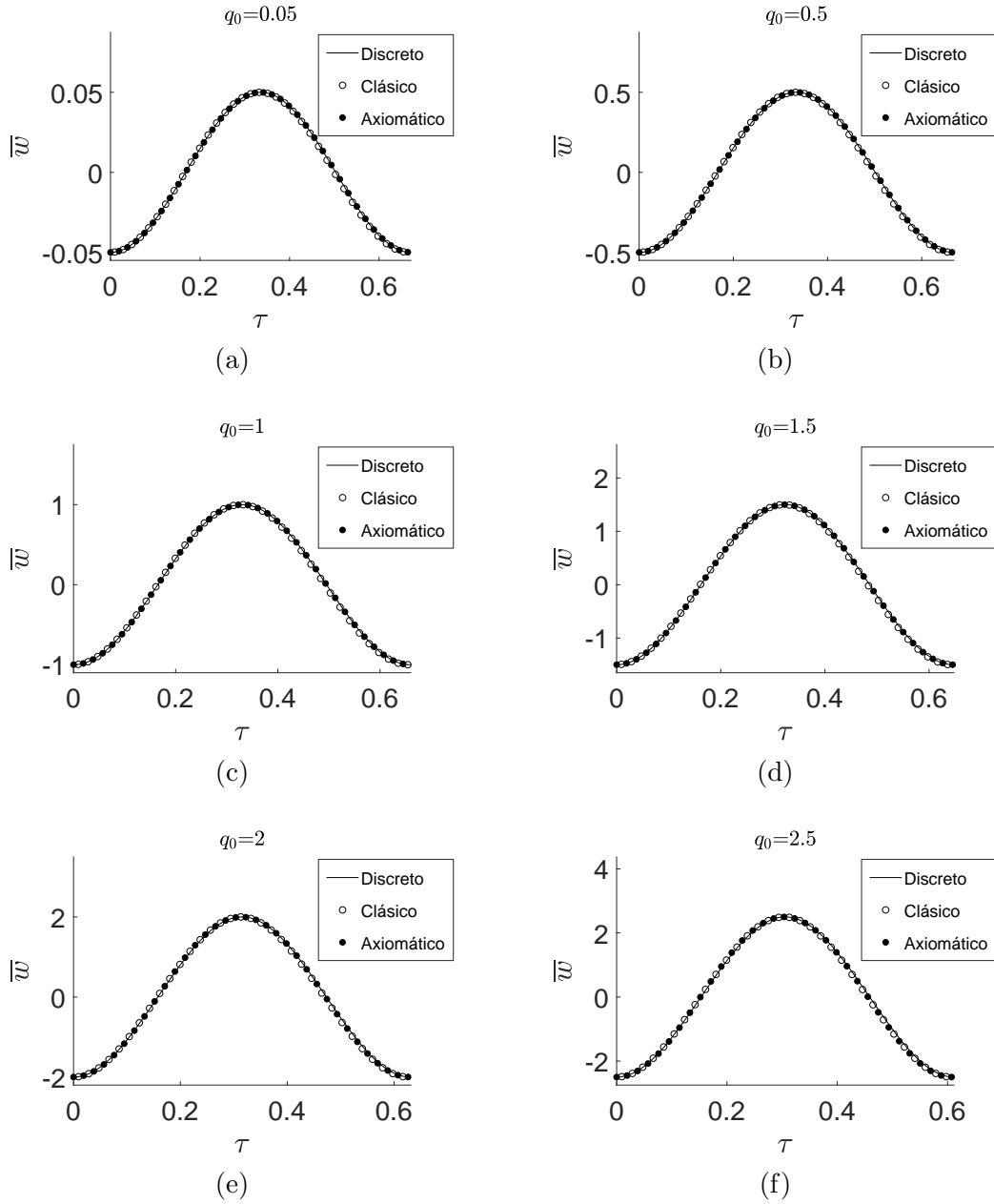


Figura 5.5: Modelos discreto y continuos. Desplazamiento transversal adimensional de la partícula central en el modelo discreto y $\bar{w}(1/2, \tau)$ en los modelos continuos para $N = 23$, $\bar{\kappa} = \pi/8$, $h = 0.012$ (axiom.) y: (a) $q_0 = 0.05$, (b) $q_0 = 0.5$, (c) $q_0 = 1$, (d) $q_0 = 1.5$, (e) $q_0 = 2$ y (f) $q_0 = 2.5$.

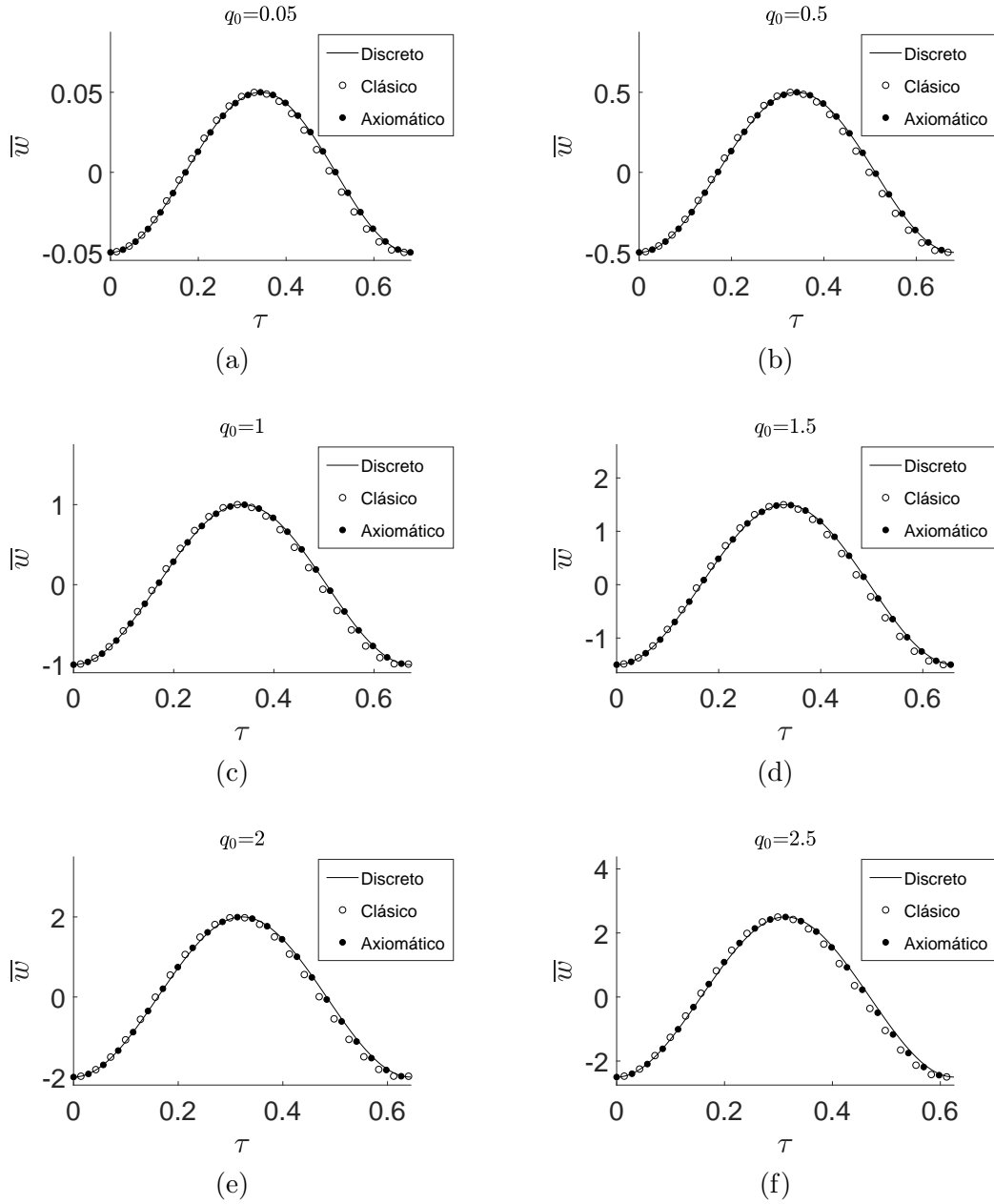


Figura 5.6: Modelos discreto y continuos. Desplazamiento transversal adimensional de la partícula central en el modelo discreto y $\bar{w}(1/2, \tau)$ en los modelos continuos para $N = 11$, $\bar{\kappa} = \pi/4$, $h = 0.024$ (axiom.) y: (a) $q_0 = 0.05$, (b) $q_0 = 0.5$, (c) $q_0 = 1$, (d) $q_0 = 1.5$, (e) $q_0 = 2$ y (f) $q_0 = 2.5$.

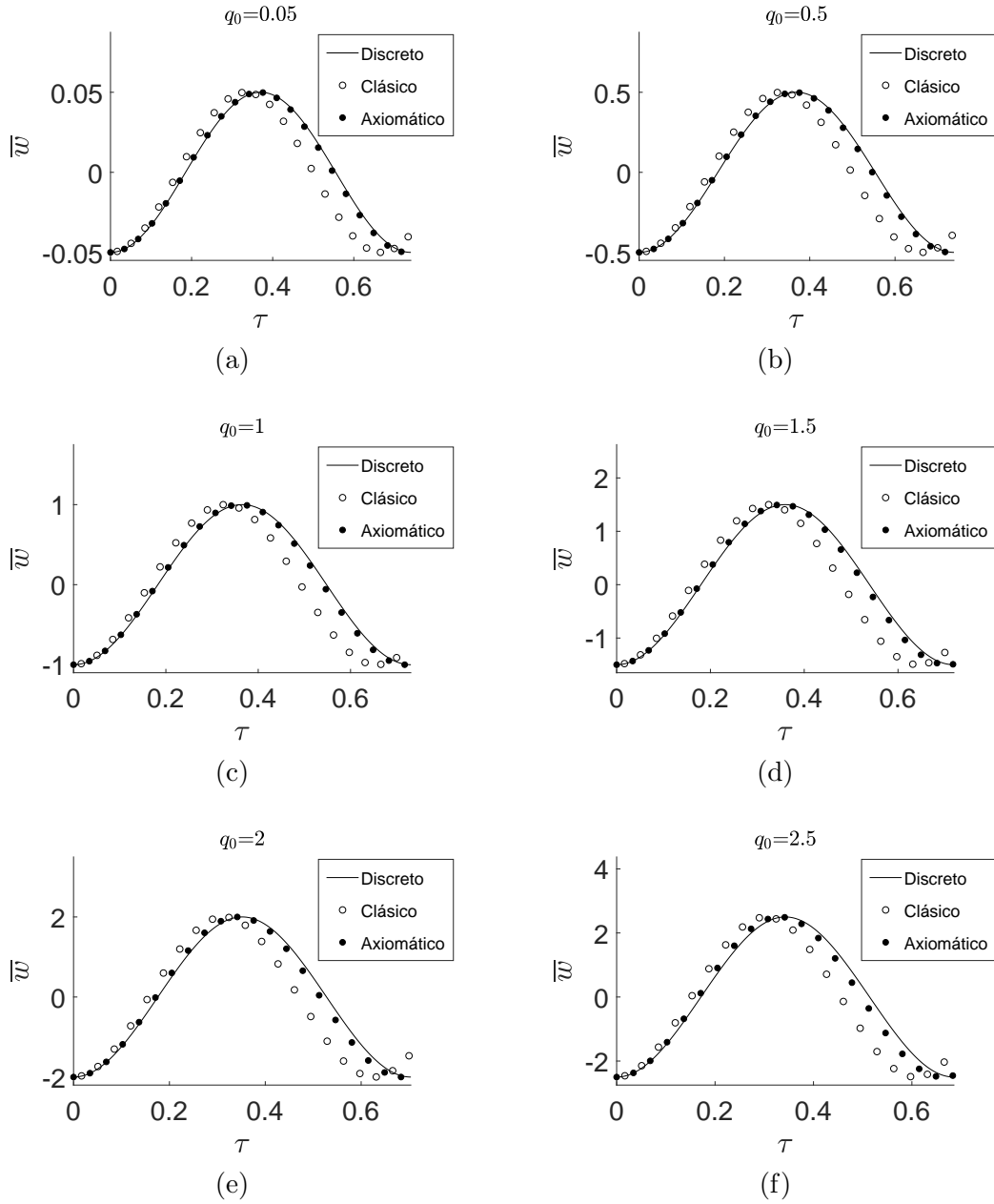


Figura 5.7: Modelos discreto y continuos. Desplazamiento transversal adimensional de la partícula central en el modelo discreto y $\bar{w}(1/2, \tau)$ en los modelos continuos para $N = 5$, $\bar{\kappa} = \pi/2$, $h = 0.048$ (axiom.) y: (a) $q_0 = 0.05$, (b) $q_0 = 0.5$, (c) $q_0 = 1$, (d) $q_0 = 1.5$, (e) $q_0 = 2$ y (f) $q_0 = 2.5$.

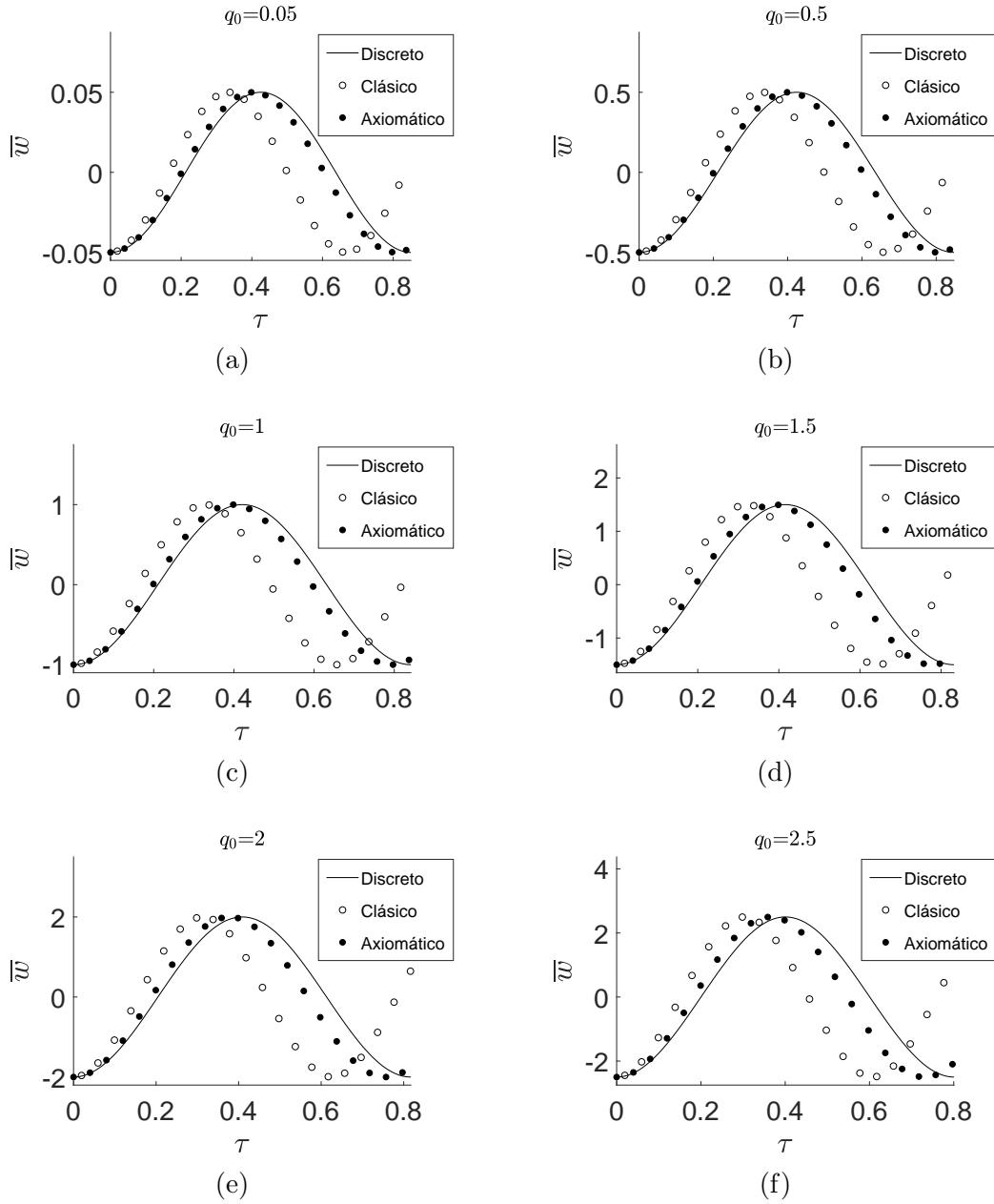


Figura 5.8: Modelos discreto y continuos. Desplazamiento transversal adimensional de la partícula central en el modelo discreto y $\bar{w}(1/2, \tau)$ en los modelos continuos para $N = 3$, $\bar{\kappa} = 3\pi/4$, $h = 0.072$ (axiom.) y: (a) $q_0 = 0.05$, (b) $q_0 = 0.5$, (c) $q_0 = 1$, (d) $q_0 = 1.5$, (e) $q_0 = 2$ y (f) $q_0 = 2.5$.

La comparación de las frecuencias temporales obtenidas a partir de diferentes formulaciones permite visualizar de forma clara el grado de aproximación de los modelos axiomático y continuo clásico al modelo discreto de referencia. El análisis realizado para valores crecientes de q_0 muestra la dependencia de la frecuencia con la amplitud del desplazamiento inicial. Esta dependencia es característica de problemas no lineales. La frecuencia temporal correspondiente al modelo discreto se obtiene a partir de la transformada rápida de Fourier del desplazamiento transversal de una partícula. En relación a los modelos continuos, la frecuencia temporal está representada bien por la ecuación (5.99), correspondiente a la solución analítica, bien por la ecuación (5.102), correspondiente a la solución perturbativa.

La figura 5.9 muestra la frecuencia adimensional $\bar{\omega}$ de las vibraciones del desplazamiento transversal frente a q_0 . La figura muestra cómo la frecuencia aumenta con valores crecientes de q_0 . Para valores reducidos de q_0 , la curva tiende a ser horizontal, lo que indica que la frecuencia no depende de la amplitud, característica propia de la vibración en el régimen lineal. Cuando N disminuye, el efecto de escala es más relevante y la frecuencia temporal de los modelos discreto y axiomático disminuye. El modelo continuo clásico mantiene constante la frecuencia al disminuir N debido a que su formulación no considera el efecto de escala. Para $N = 23$ y $N = 11$, figuras 5.9a y 5.9b respectivamente, el modelo axiomático captura con exactitud la frecuencia temporal del modelo discreto, mientras que comienzan a aparecer diferencias significativas con el modelo clásico. Para valores de $N > 23$, se ha comprobado que estas diferencias desaparecen. Cuando la longitud de onda es del mismo orden que la dimensión de la microestructura (Fig. 5.9c para $N = 5$ y Fig. 5.9d para $N = 3$), el modelo axiomático ofrece una aproximación considerablemente mejor de la frecuencia del modelo discreto que la del continuo clásico, aunque ya aparecen diferencias con la solución discreta.

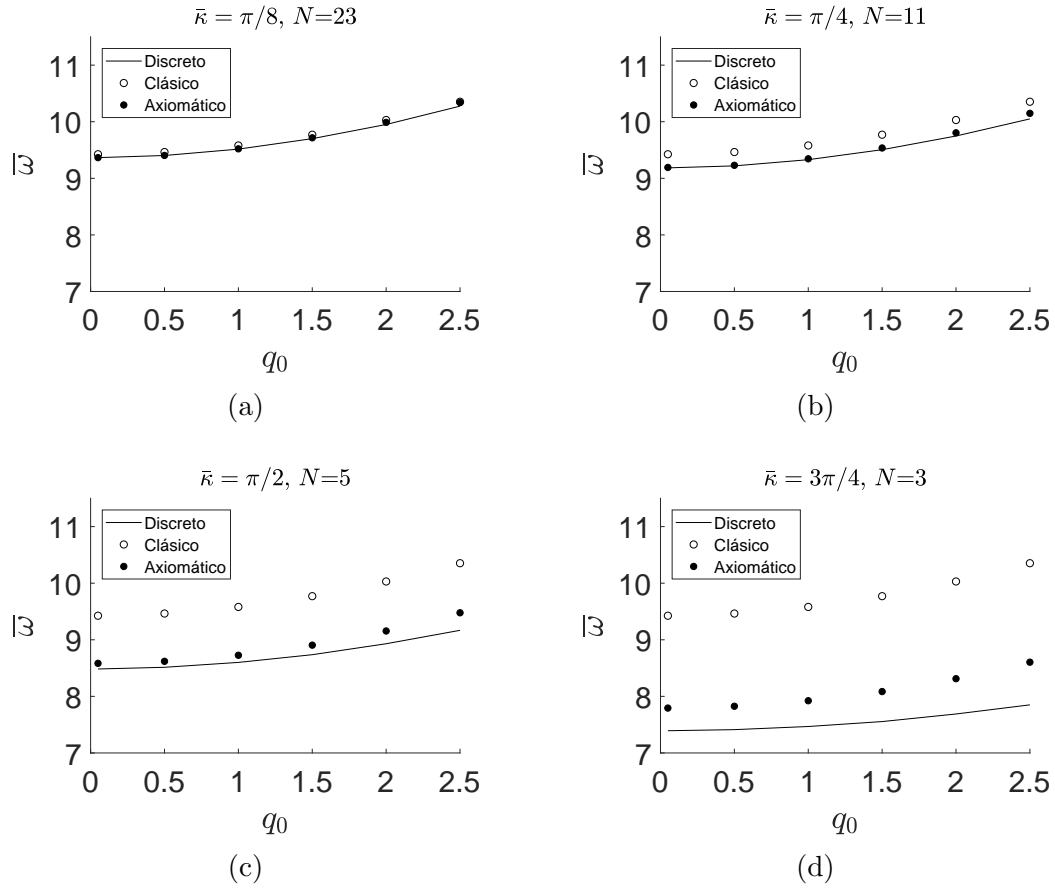


Figura 5.9: Modelos discreto y continuos. Frecuencias adimensionales para: (a) $\bar{\kappa} = \pi/8$ y $N = 23$, (b) $\bar{\kappa} = \pi/4$ y $N = 11$, (c) $\bar{\kappa} = \pi/2$ y $N = 5$, y (d) $\bar{\kappa} = 3\pi/4$ y $N = 3$.

5.6.2. Análisis del desplazamiento axial

A continuación se muestran los resultados relativos al desplazamiento axial con el objetivo de validar la hipótesis simplificativa de la sección 5.3.1.

La figura 5.10 muestra, para $q_0 = 1$ y diferentes valores de $N=[23, 11, 3]$, la evolución temporal del desplazamiento axial adimensional de la partícula a la derecha de la partícula central ($n = \frac{N+3}{2} + 1$, ver Fig. 5.4) del modelo discreto, que se corresponde al punto $\xi = 1/2 + 1/(N + 1)$ para los modelos continuos. Se toma esta partícula dado que la partícula central, elegida para representar la vibración transversal, no presenta desplazamiento en la dirección axial debido a las condiciones de simetría. Para el modelo discreto, la evolución temporal del desplazamiento axial se obtiene a partir de la ecuación (5.76) y (5.77). Para los modelos continuos, la evolución temporal está definida por la expresión (5.105).

La figura muestra cómo para $N = 23$ (Fig. 5.10a) los modelos continuos capturan el desplazamiento del modelo discreto. Para $N = 11$ (Fig. 5.10b), los modelos continuos aproximan correctamente el desplazamiento del discreto, a pesar de la presencia de armónicos de alta frecuencia en la respuesta del discreto. Para $N = 3$ (Fig. 5.10c), ninguno de los modelos continuos captura el desplazamiento axial del modelo discreto. El motivo es debido a que, en este caso, la hipótesis utilizada para obtener la ecuación (5.58), que suponía despreciables las aceleraciones axiales, ya no es válida. La figura 5.11 muestra la aceleración axial y transversal de la partícula de control ($n = \frac{N+3}{2} + 1$) para los valores de N considerados. Como se puede observar, para $N = 23$ (Fig. 5.11a) y para $N = 11$ (Fig. 5.11b), la aceleración axial es considerablemente inferior a la aceleración transversal. En cambio, para $N = 3$ (Fig. 5.11c), la aceleración axial es del mismo orden de magnitud que la transversal y, por tanto, no puede considerarse despreciable. Consecuentemente, la ecuación (5.56) no es adecuada para reproducir el comportamiento axial del cable en estas condiciones. Sin embargo, es importante recalcar que el desplazamiento axial es tres órdenes de magnitud inferior al correspondiente desplazamiento transversal y su influencia en este es moderada. Si se impone una condición inicial de amplitud reducida para el desplazamiento axial, que sea diferente a la dada por la ecuación (5.106), el desplazamiento transversal no se ve modificado. Esto se ha comprobado mediante cálculos adicionales para el modelo discreto. Por tanto, en estas condiciones, el modelo axiomático permite cap-

turar el desplazamiento transversal del modelo discreto independientemente de la forma del desplazamiento axial.

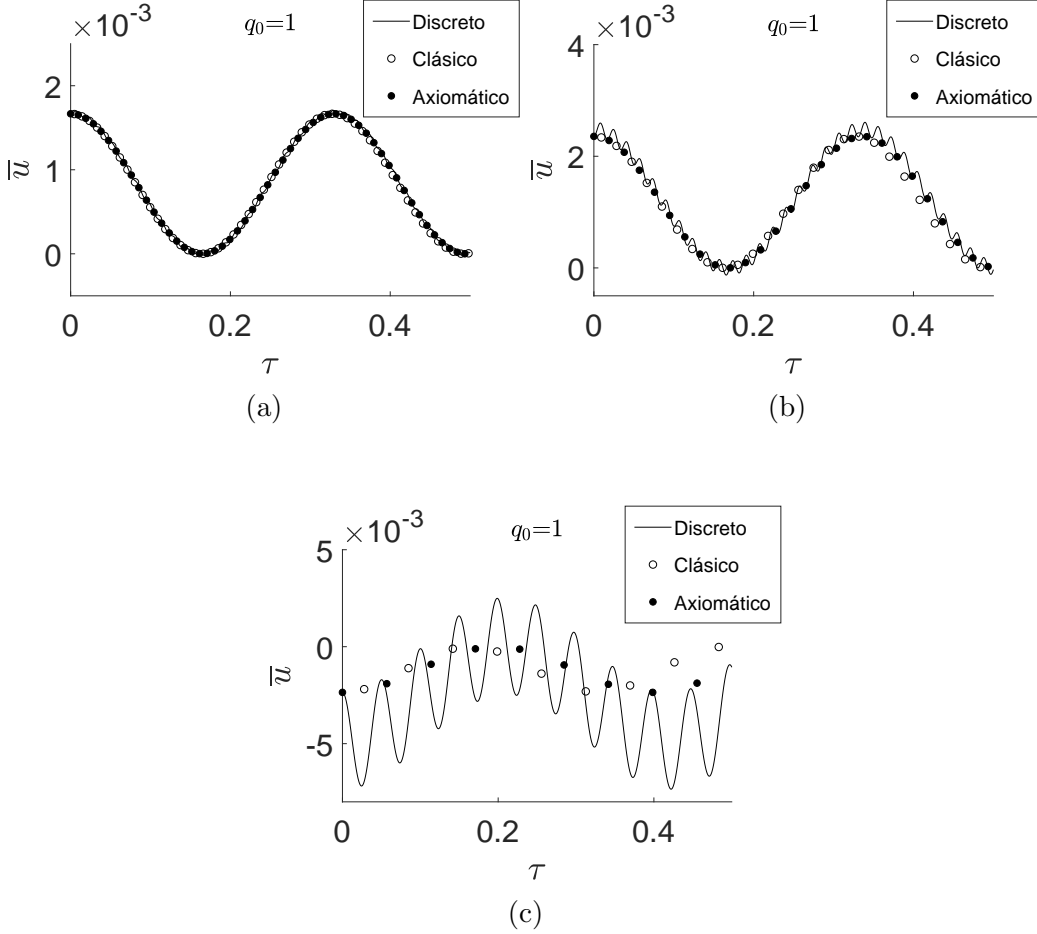
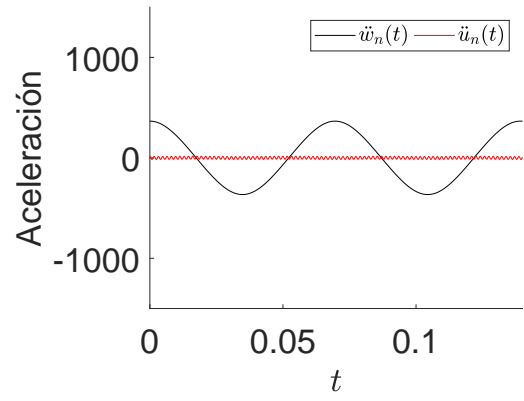
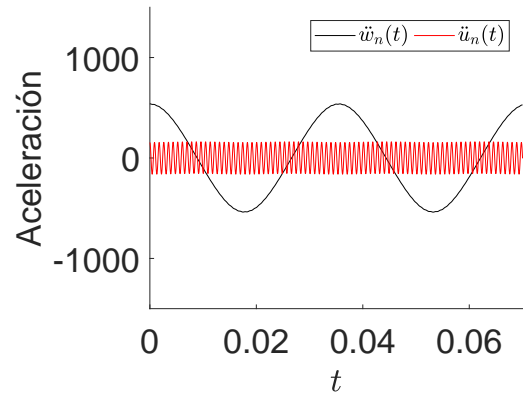


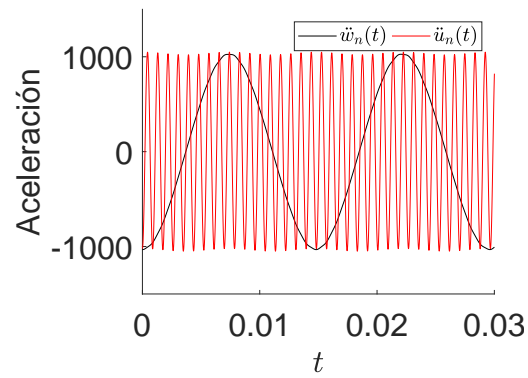
Figura 5.10: Modelos discreto y continuos. Desplazamiento axial adimensional de la partícula a la derecha de la central en el modelo discreto y $\bar{u}(1/2 + 1/(N+1), \tau)$ en los modelos continuos para $q_0 = 1$ y: (a) $\bar{\kappa} = \pi/8$ y $N = 23$, (b) $\bar{\kappa} = \pi/4$ y $N = 11$, y (c) $\bar{\kappa} = 3\pi/4$ y $N = 3$.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.11: Modelo discreto. Aceleración transversal y axial de la partícula a la derecha de la central en el modelo discreto para: (a) $\bar{\kappa} = \pi/8$ y $N = 23$, (b) $\bar{\kappa} = \pi/4$ y $N = 11$, y (c) $\bar{\kappa} = 3\pi/4$ y $N = 3$.

5.7. Conclusiones

En este capítulo se ha analizado el comportamiento dinámico de un cable tenso estructurado sometido a vibraciones no lineales axiales y transversales. Este cable se ha representado inicialmente con un modelo discreto que pone de manifiesto el efecto de escala. Por otro lado se ha desarrollado un modelo continuo axiomático con el objetivo de obtener una herramienta para analizar los efectos de escala en cables estructurados, mostrando un reducido coste computacional en comparación al discreto. El modelo axiomático se ha formulado a partir de una densidad de energía cinética enriquecida, basada en la teoría de gradiente de inercia, y una densidad de energía potencial clásica que tiene en cuenta la no linealidad en la deformación del cable. Una continualización no estándar del problema discreto ha permitido establecer una relación entre los parámetros del modelo axiomático y los parámetros físicos del discreto. Concretamente, se ha obtenido el parámetro de escala a partir de la dimensión característica de la microestructura. Además, para un valor nulo de este parámetro en el modelo axiomático, es posible recuperar el modelo continuo clásico no lineal de un cable en el que no se consideran efectos de escala.

La solución de las ecuaciones de gobierno de los diferentes modelos se han obtenido, para condiciones iniciales y de contorno generales. La solución de las ecuaciones del modelo discreto se ha obtenido numéricamente utilizando el algoritmo de Verlet. Las soluciones de las ecuaciones del continuo axiomático y clásico se han obtenido a partir del Método de Galerkin. Estas soluciones, particularizadas para unas condiciones iniciales y de contorno determinadas, han permitido la comparación de resultados entre los modelos continuos y el modelo discreto, considerado como referencia, con el fin de validar la formulación propuesta. Esta comparación, que no es común en la literatura, ha permitido mostrar la superioridad del modelo axiomático frente al clásico para capturar el efecto de escala. Las principales conclusiones se resumen a continuación.

- La validez de los modelos continuo clásico y axiomático para reproducir el comportamiento dinámico del cable estructurado muestra amplias diferencias. Se ha mostrado que la validez del modelo continuo clásico está limitada a números de onda reducidos ($\bar{\kappa} < \pi/8$). Solo para estos valores de número de onda, el modelo clásico permite reproducir

los resultados del modelo discreto. Sin embargo, el modelo continuo axiomático permite obtener resultados equivalentes a los del modelo discreto para números de onda más elevados ($\bar{\kappa} \leq \pi/2$), correspondiendo a longitudes de onda del orden de la dimensión característica de la microestructura, donde el efecto de escala comienza a ser significativo. Para números de onda más elevados ($\pi/2 < \bar{\kappa} \leq \pi$) el efecto de escala es muy relevante y el nivel de concordancia de los resultados del modelo axiomático con los del discreto es menor. Sin embargo, el modelo axiomático ofrece una aproximación notablemente mejor a los resultados del discreto que el modelo clásico. En resumen, los resultados obtenidos con el modelo continuo axiomático tienen un nivel de concordancia mucho mayor con los del discreto en comparación con los del modelo continuo clásico, especialmente cuando el efecto de escala es relevante.

- El efecto del comportamiento no lineal del cable depende del valor de la amplitud inicial. Para valores reducidos de esta amplitud, el efecto de la no linealidad en el cable es reducida. La frecuencia está escasamente afectada por la amplitud inicial, que es una característica propia en el régimen lineal. Sin embargo, para valores elevados de la amplitud inicial se muestra un marcado carácter no lineal en el comportamiento del cable. La frecuencia temporal depende del valor de amplitud inicial y aumenta con valores crecientes de la amplitud.
- El método perturbativo ofrece ecuaciones cerradas para la función temporal del desplazamiento y la correspondiente frecuencia, obteniéndose una aproximación equivalente a la solución analítica. Por tanto, la solución perturbativa es una opción sencilla y precisa de la evolución temporal del cable tenso estructurado.

El desarrollo de un modelo continuo para el análisis del comportamiento de un cable tenso estructurado responde a la necesidad de disponer de herramientas que permitan comprender el régimen no lineal de estructuras con efecto de escala, como en el caso de las nano-estructuras. Estas se someten a vibraciones que pueden presentar longitudes de onda del orden de la dimensión característica de la microestructura.

Capítulo 6

Conclusiones generales y trabajos futuros

La presente tesis doctoral está centrada en el análisis del comportamiento dinámico de sólidos estructurados elásticos mediante modelos de celda y modelos del Continuo Generalizado. Se han analizado dos problemas diferentes, ambos relacionados con el comportamiento dinámico de estructuras *lattice*, cuyo denominador común es la presencia de efectos de escala en dicho comportamiento.

Las conclusiones detalladas alcanzadas tras el análisis de cada uno de los problemas se han recogido en la sección 3.8 para el modelo de celda y en la sección 5.7 para el modelo del Continuo Generalizado.

A continuación se recogen, para cada uno de estos dos problemas, las siguientes conclusiones de carácter general, y se indican algunas líneas de investigación que permitirían seguir avanzando en el conocimiento del comportamiento dinámico de estos sólidos estructurados.

6.1. Conclusiones generales

En relación con el estudio de la estructura placa-viga mediante modelos de celda:

- Se ha mostrado la capacidad de la estructura *lattice* estudiada para la

atenuación y direccionalidad de ondas elásticas de determinadas frecuencias.

- Para reproducir estos fenómenos es imprescindible tener en consideración la estructura interna del sólido en el estudio de la propagación de ondas. A este respecto, la metodología basada en modelos de celda y en la teoría de Bloch ha mostrado su eficacia, con un importante ahorro del coste computacional sobre otras metodologías que consideran el sólido completo.
- La identificación de los grupos adimensionales que afectan a la respuesta del sistema permite una mejor comprensión de su comportamiento y contribuye a un adecuado diseño del mismo en función de los requerimientos que se pretendan cumplir.

En relación con el estudio del cable estructurado con un modelo del Continuo Generalizado:

- El modelo axiomático de gradiente de inercia propuesto, a pesar de su relativa sencillez (tan solo contiene un parámetro adicional), ha demostrado su idoneidad para recoger los efectos de escala presentes en las vibraciones no lineales de cables y recogidos en el modelo discreto de referencia. Así pues, supera los inconvenientes de los modelos clásicos, que no recogen dichos efectos de escala, con un coste computacional sensiblemente menor que el de los modelos discretos.
- Del mismo modo que el modelo continuo clásico se obtiene aplicando una continualización estándar al sistema discreto, el modelo continuo generalizado propuesto coincide con el que se deriva de una continualización no estándar del mismo discreto. Este hecho permite obtener el parámetro de escala que aparece en el modelo continuo a partir de las características del sistema de referencia.
- Para longitudes de onda próximas a la distancia característica de la estructura del cable, incluso el modelo continuo propuesto presenta diferencias con el discreto. Se hace necesario seguir investigando para, utilizando modelos continuos, reproducir más fielmente el comportamiento del sólido estructurado ante este tipo de vibraciones.

6.2. Trabajos futuros

Durante la realización de este trabajo se han planteado una serie de cuestiones que, por su interés, pueden seguir estudiándose en futuras investigaciones. Entre ellas, se recogen aquí las siguientes:

En relación con el estudio de la estructura placa-viga mediante modelos de celda:

- Desarrollo de un prototipo de estructura placa-viga como demostrador de las capacidades de estos sistemas para la protección contra vibraciones no deseadas.
- Estudio del comportamiento de sistemas placa-viga en las que la relación de esbeltez de la viga obligue a considerar la deformación por esfuerzo cortante. En ese caso, se deberá utilizar la teoría de Timoshenko para modelar el resonador.

En relación con el estudio del cable estructurado con un modelo del Continuo Generalizado:

- Estudio del comportamiento vibratorio no lineal del cable estructurado, sobre el que se coloca una masa puntual. Este problema es un paso previo al planteamiento del problema inverso (identificación de la masa), de interés en el campo de los nanosensores.
- Extensión del modelo a problemas bidimensionales para modelar el comportamiento de membranas tensas, por su interés creciente en la tecnología de nanosensores.

6.3. Difusión de resultados

El trabajo de investigación realizado para llevar a cabo esta tesis doctoral ha dado lugar, hasta la fecha, a las siguientes publicaciones en revistas y presentaciones en congresos.

Artículos en revistas recogidas en JCR.

- Serrano, Ó., Zaera, R., and Fernández-Sáez, J., *Band structure analysis of a thin plate with periodic arrangements of slender beams*. Journal of Sound and Vibration 420 (2018): 330-345.
- Serrano, Ó., Zaera, R., Fernández-Sáez, J., and Ruzzene, M., *Generalized continuum model for the analysis of nonlinear vibrations of taut strings with microstructure* (En revisión).
- Serrano, Ó., Zaera, R., and Fernández-Sáez, J., *Influence of resonator frequencies on the band structure of locally resonant metastructures* (En revisión).

Presentaciones a congresos internacionales.

- Serrano, Ó., Zaera, R., and Fernández-Sáez, J. *Study of wave propagation in periodic arrangements of slender beams rigidly joined to a thin plate*. 10th European Solid Mechanics Conference (ESMC 2018). Bologna, Italy, Junio de 2018.
- Serrano, Ó., Zaera, R., Fernández-Sáez, J., and Ruzzene, M., *Generalized continuum model for the analysis of nonlinear vibrations in taut strings*. 55th Society of Engineering Science (SES 2018). Madrid, Spain, Octubre de 2018.

Chapter 7

General conclusions and future work

This doctoral thesis is focused on the analysis of the dynamic behaviour of elastic structured solids, using unit cell models and generalized continuum models. Two different problems have been studied, the nexus being the consideration of length scale effects.

The detailed conclusions reached after the analysis of each considered problem have been collected in section 3.8 for the cell model, and in section 5.7 for the generalized continuum one.

In this chapter, the general conclusions corresponding to each problem are highlighted, and some future research topics that may contribute to knowledge of the dynamic behaviour of structured solids are proposed.

7.1. General conclusions

In relation to the study of the plate-beam structure using cell models:

- The ability of the lattice structure for the attenuation and directionality of elastic waves with specific characteristics has been shown.

- In order to reproduce these features, it is necessary to take into account, for the study of wave propagation phenomena, the internal structure of the solid. In this respect, the methodology based on cell models and on the Bloch theory has proved its efficiency, with a noticeable saving in computational time, as compared to other methodologies which consider the whole solid.
- The identification of nondimensional groups affecting the response of the system permits a deeper understanding of its behaviour, and it contributes to a suitable design according to the requirements to be fulfilled.

In relation to the study of the structured cable using a generalized continuum model:

- Despite its relative simplicity (it just considers one additional parameter), the proposed axiomatic model based on the inertia gradient theory has proven to be suitable for considering the scale effects shown in the nonlinear vibration of structured cables, properly captured by the reference discrete model. Therefore, it overcomes the disadvantages of the classical continuum models, which do not account for the quoted scale effects, with a much lower computational cost as compared to discrete models.
- In the same way that the classical continuum model can be derived from a standard continualisation of the discrete system, the generalized continuum model coincides with that obtained from a non standard continualization of the same discrete. This permits to derive the value of the length scale parameter appearing in continuum model from the characteristics of the reference discrete system.
- For wave lengths close to the characteristic structure of the cable, even the proposed model shows differences with the discrete. Therefore, it seems necessary to continue this research in order to be able to accurately model the structured solid submitted to this type of vibration.

7.2. Future work

In the course of this work, several questions have been posed that could be studied in future works, due to their interest. Among them, we list the following.

In relation to the study of the plate-beam structure using cell models:

- Development of a prototype of the plate-beam structure that could serve as a demonstrator of the ability of these systems to protect against undesired vibrations.
- Study of the behaviour of plate-beam structures in which the low slenderness of the resonator requires the consideration of shear deformation effects. In this case, the Timoshenko theory will be used to model the resonator.

In relation to the study of the structured cable using a generalized continuum model:

- Study of the nonlinear vibratory behaviour of the structured cable on which a point mass is attached. This can be considered as a step prior to the statement of the inverse problem (mass identification), of interest in the field of nanosensors.
- Extension of the model to bidimensional problems, in order to analyze the dynamics of taut membranes due to its growing interest in nanosensors.

7.3. Dissemination of results

The research work developed for the Thesis completion has led, to date, to the following journal papers and conference presentations.

Papers in JCR journals.

- Serrano, Ó., Zaera, R., and Fernández-Sáez, J., *Band structure analysis of a thin plate with periodic arrangements of slender beams*. Journal of Sound and Vibration 420 (2018): 330-345.
- Serrano, Ó., Zaera, R., Fernández-Sáez, J., and Ruzzene, M., *Generalized continuum model for the analysis of nonlinear vibrations of taut strings with microstructure* (Under review).
- Serrano, Ó., Zaera, R., and Fernández-Sáez, J., *Influence of resonator frequencies on the band structure of locally resonant metastructures* (Under review).

Presentations in international conferences.

- Serrano, Ó., Zaera, R., and Fernández-Sáez, J. *Study of wave propagation in periodic arrangements of slender beams rigidly joined to a thin plate*. 10th European Solid Mechanics Conference (ESMC 2018). Bologna, Italy, Junio de 2018.
- Serrano, Ó., Zaera, R., Fernández-Sáez, J., and Ruzzene, M., *Generalized continuum model for the analysis of nonlinear vibrations in taut strings*. 55th Society of Engineering Science (SES 2018). Madrid, Spain, Octubre de 2018.

Apéndice

Apéndice A: Obtención de la Primera Zona de Brillouin en una estructura *lattice* bidimensional

El *lattice* directo bidimensional mostrado en la figura 7.1a consiste en un conjunto de puntos materiales separados una distancia característica a y un ángulo θ definido en el intervalo $\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$. Los vectores base del *lattice* directo ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$) se expresan como

$$\mathbf{e}_1 = a \left(\cos \frac{\theta}{2} \mathbf{i} + \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{j} \right), \quad (7.1)$$

$$\mathbf{e}_2 = a \left(\cos \frac{\theta}{2} \mathbf{i} - \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{j} \right). \quad (7.2)$$

Utilizando la relación (2.10), los vectores base del *lattice* recíproco ($\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$) se escriben como

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\pi}{a} \left(\sec \frac{\theta}{2} \mathbf{i} + \csc \frac{\theta}{2} \mathbf{j} \right), \quad (7.3)$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{\pi}{a} \left(\sec \frac{\theta}{2} \mathbf{i} - \csc \frac{\theta}{2} \mathbf{j} \right). \quad (7.4)$$

La PZB se corresponde con la intersección de las zonas delimitadas por las rectas

$$\mathbf{G}_{h_1, h_2} \cdot \left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{G}_{h_1, h_2}}{2} \right) = 0, \quad (7.5)$$

donde

$$\mathbf{G}_{h_1, h_2} = h_1 \mathbf{b}_1 + h_2 \mathbf{b}_2. \quad (7.6)$$

Sustituyendo las relaciones (7.3), (7.4) y (7.6) en (7.5) se obtiene

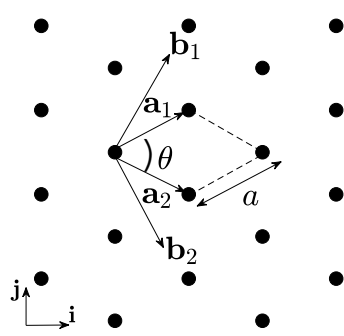
$$\begin{aligned} & \frac{\pi^2}{a^2} \left[(h_1 + h_2)^2 \sec^2 \frac{\theta}{2} + (h_1 - h_2)^2 \csc^2 \frac{\theta}{2} \right] + \\ & \frac{2\pi}{a} \left[(h_1 + h_2) \sec \frac{\theta}{2} k_x - (h_1 - h_2) \csc \frac{\theta}{2} k_y \right] = 0. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Para valores de $h_1 = 0, \pm 1$ y $h_2 = 0, \pm 1$ se obtienen cada una de las rectas que delimitan el contorno de la PZB.

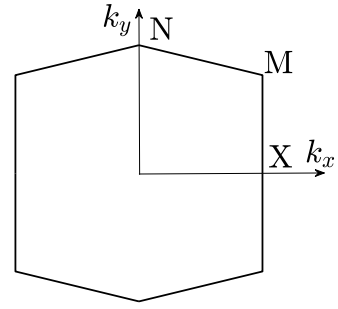
La figura 7.1b muestra la PZB para a y θ arbitrarios. Los puntos representativos X, M, N de la PZB pueden obtenerse a partir de la intersección de las diferentes rectas que definen el contorno

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_X &= \left(\frac{\pi}{a} \sec \frac{\theta}{2}, 0 \right), \\ \mathbf{k}_M &= \left(\frac{\pi}{a} \sec \frac{\theta}{2}, \frac{\pi}{2a} \left(\csc \frac{\theta}{2} - \tan \frac{\theta}{2} \sec \frac{\theta}{2} \right) \right), \\ \mathbf{k}_N &= \left(0, \frac{\pi}{2a} \frac{\sec^2 \frac{\theta}{2} + \csc^2 \frac{\theta}{2}}{\csc \frac{\theta}{2}} \right). \end{aligned} \quad (7.8)$$

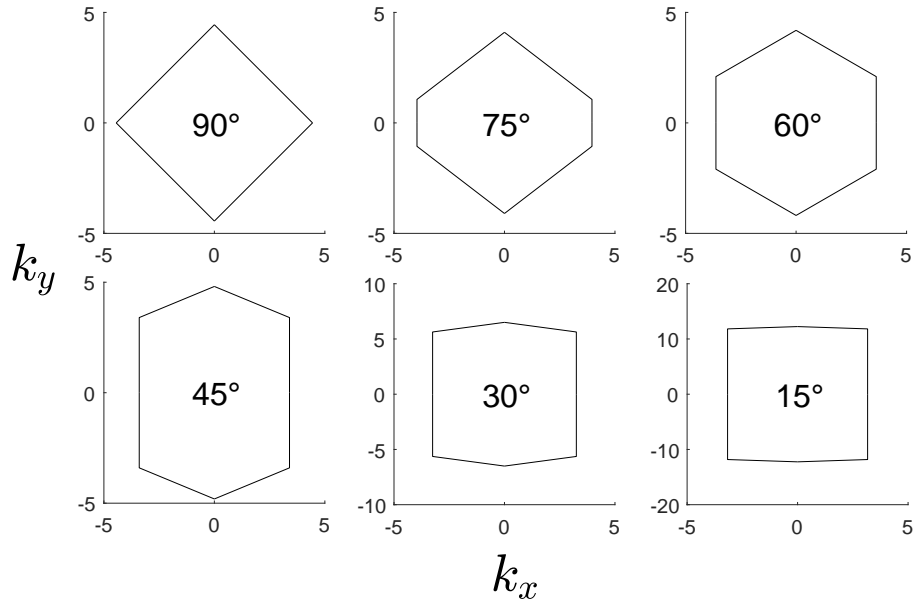
En la figura 7.1c se recogen las PZB para $a = 1$ y $\theta = 90^\circ, 75^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$ y 15° . Se puede observar cómo cambia la geometría de la zona de Brillouin para diferentes valores de θ . Para valores pequeños de θ , la geometría tiende a ser cuadrada, al igual que para $\theta = 90^\circ$. Para valores intermedios de θ , prevalece la geometría hexagonal.



(a)



(b)



(c)

Figura 7.1: (a) *Lattice* directo bidimensional; (b) PZB puntos X, M, N ; (c) PZB para $a = 1$ y $\theta = 90^\circ, 75^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$ y 15° .

Apéndice B: Ecuación de gobierno de las vibraciones libres de la estructura *lattice* placa-viga

A continuación se presenta en detalle el desarrollo de la obtención de las ecuaciones de gobierno [31] de las vibraciones libres de la estructura placa-viga. Dicha ecuación se adimensionaliza posteriormente para obtener los tres grupos adimensionales en la sección 3.2.

El comportamiento dinámico a flexión de las vigas, en ausencia de cargas externas, está descrito por la ecuación de movimiento basada en la teoría de vigas de Euler-Bernoulli

$$CU_i'''' + \rho_* \ddot{U}_i = 0, \quad (7.9)$$

donde $\mathbf{U}_i = \{U(Z, t), V(Z, t), 0\}_i^T$ es el vector de desplazamientos transversales de la viga i -ésima situada en la posición (X_i, Y_i) . Los símbolos $(\bullet)'$ y $(\dot{\bullet})$ representan la derivada espacial respecto de Z y temporal, respectivamente. La hipótesis de Navier queda definida como

$$\boldsymbol{\varphi}_i = \mathbf{n} \times \mathbf{U}_i', \quad (7.10)$$

donde $\boldsymbol{\varphi}_i = \{\varphi_X(Z, t), \varphi_Y(Z, t), 0\}_i^T$ es el vector de rotación de la sección de la viga, \times es el producto vectorial y $\mathbf{n} = \{0, 0, 1\}$ es el vector unitario en dirección Z . La relación constitutiva queda definida como

$$\mathbf{L}_i = C\mathbf{n} \times \mathbf{U}_i'', \quad (7.11)$$

donde $\mathbf{L}_i = \{L_X(Z, t), L_Y(Z, t), 0\}_i^T$ es el vector de momentos flectores. El vector de esfuerzos cortantes $\mathbf{T}_i = \{T_X(Z, t), T_Y(Z, t), 0\}_i^T$ se obtiene mediante la expresión

$$\mathbf{T}_i = -C\mathbf{n} \times \mathbf{U}_i'''. \quad (7.12)$$

Las vigas se suponen inextensibles, por tanto, el movimiento vertical está descrito como

$$W_i' = 0, \quad F_i' = \rho_* \ddot{W}_i, \quad (7.13)$$

donde W_i es el desplazamiento en dirección Z y F_i , el esfuerzo axial.

Las ecuaciones de movimiento de la placa con las vigas son

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{Q} + \sum_i F_i \Big|_{Z=0} \delta(X - X_i) \delta(Y - Y_i) &= \rho \ddot{W}, \\ \nabla \cdot \underline{\underline{M}} - \mathbf{n} \times \mathbf{Q} + \sum_i \mathbf{L}_i \Big|_{Z=0} \delta(X - X_i) \delta(Y - Y_i) &= \mathbf{0}.\end{aligned}\quad (7.14)$$

En la ecuación (7.14), $W=W(X,Y,t)$ es el campo de desplazamientos en dirección Z, $\mathbf{Q} = \{Q_X(X,Y,t), Q_Y(X,Y,t), 0\}^T$ es el vector esfuerzos cortantes y $\underline{\underline{M}}$ es el tensor de momentos que puede expresarse, a través de la ecuación constitutiva elástica, en función de las deformaciones de flexión y alabeo

$$\underline{\underline{M}} = D \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} & (1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} & 0 \\ (1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.15)$$

δ representa la delta de Dirac y $\nabla \equiv \{\partial/\partial X, \partial/\partial Y, 0\}$ es el operador gradiente en el plano $\{X, Y\}$. La hipótesis cinemática de la teoría de placas de Kirchhoff viene dada por

$$\boldsymbol{\psi} = -\mathbf{n} \times \nabla W \quad (7.16)$$

donde $\boldsymbol{\psi} = \{\psi_X(X,Y,t), \psi_Y(X,Y,t), 0\}^T$ es el vector de rotación.

Eliminando el vector de esfuerzos cortantes de la placa, \mathbf{Q} , de las ecuaciones (7.14) y utilizando la expresión del tensor de momentos (7.15), se obtiene una ecuación escalar que gobierna los desplazamientos transversales del sistema placa-viga

$$\begin{aligned}D\Delta^2 W + \rho \ddot{W} &= \sum_i \left\{ F_i \Big|_{Z=0} \delta(X - X_i) \delta(Y - Y_i) - \right. \\ &\quad \left. \nabla \cdot \left[\mathbf{n} \times \mathbf{L}_i \Big|_{Z=0} \delta(X - X_i) \delta(Y - Y_i) \right] \right\}\end{aligned}\quad (7.17)$$

donde Δ^2 es el operador bilaplaciano en coordenadas cartesianas

$$\Delta^2 \equiv \frac{\partial^4}{\partial X^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial X^2 \partial Y^2} + \frac{\partial^4}{\partial Y^4}. \quad (7.18)$$

El desplazamiento de la placa en el plano $\{X, Y\}$ está impedido y la igualdad de los desplazamientos y rotaciones en el punto de unión entre la placa y las vigas conduce a las siguientes condiciones cinemáticas

$$\mathbf{U}_i \Big|_{Z=0} = \mathbf{0}, \quad W_i \Big|_{Z=0} = W \Big|_{X=X_i, Y=Y_i}, \quad \varphi_i \Big|_{Z=0} = \psi \Big|_{X=X_i, Y=Y_i}. \quad (7.19)$$

Los extremos superiores de las vigas son libres. Esta condición de contorno se define mediante las siguientes expresiones

$$F_i \Big|_{Z=l} = 0, \quad \mathbf{T}_i \Big|_{Z=l} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{L}_i \Big|_{Z=l} = \mathbf{0}. \quad (7.20)$$

Se requiere expresar la ecuación (7.17) exclusivamente en términos del desplazamiento transversal de la placa $W(X, Y, t)$ para facilitar la obtención de la relación de dispersión de la estructura *lattice*. Para ello es necesario expresar $F_i \Big|_{Z=0}$ y $\mathbf{L}_i \Big|_{Z=0}$ en función de dicha variable. Aplicando el método de separación de variables

$$\mathbf{U}_i(Z, t) = \mathbf{U}_i(Z) e^{i\omega t}, \quad (7.21)$$

$$W(X, Y, t) = W(X, Y) e^{i\omega t}, \quad (7.22)$$

$$W_i(t) = W(X_i, Y_i) e^{i\omega t}, \quad (7.23)$$

donde ω es la frecuencia propia de la vibración del sistema. El esfuerzo axial $F_i(Z, t)$ puede obtenerse a partir de las relaciones (7.13) y la condición de contorno definida en (7.20). Así,

$$F_i(Z, t) = \rho_*(Z - l) \ddot{W}_i(t) \quad (7.24)$$

y, por tanto, $F_i \Big|_{Z=0} = \rho_* l \omega^2 W_i(t)$. El vector de momentos flectores \mathbf{L}_i se puede obtener a partir de la relación (7.12) resolviendo la ecuación (7.9) con las condiciones de contorno (7.19) y (7.20). Teniendo en cuenta que la solución espacial de U_i para la ecuación (7.9) es de la forma

$$U_i(Z) = \alpha \cosh \Omega Z + \beta \sinh \Omega Z + \gamma \cos \Omega Z + \eta \sin \Omega Z \quad (7.25)$$

con

$$\Omega = \sqrt[4]{\rho_*/C} \sqrt{\omega}, \quad (7.26)$$

e imponiendo las condiciones de contorno en los extremos de la viga

$$\begin{aligned} U_i \Big|_{Z=0} &= 0, & U_i' \Big|_{Z=0} &= \psi_X \Big|_{X=X_i, Y=Y_i}, \\ U_i'' \Big|_{Z=l} &= 0, & U_i''' \Big|_{Z=l} &= 0, \end{aligned} \quad (7.27)$$

se obtienen los coeficientes independientes

$$\alpha = \frac{\psi_X \Big|_{X=X_i, Y=Y_i}}{2\Omega} \left(\frac{\sin \Omega l \cosh \Omega l - \cos \Omega l \sinh \Omega l}{1 + \cos \Omega l \cosh \Omega l} \right), \quad (7.28)$$

$$\beta = \frac{\psi_X \Big|_{X=X_i, Y=Y_i}}{2\Omega} \left(\frac{1 - \sin \Omega l \sinh \Omega l + \cos \Omega l \cosh \Omega l}{1 + \cos \Omega l \cosh \Omega l} \right), \quad (7.29)$$

$$\gamma = -\alpha, \quad (7.30)$$

$$\eta = \frac{\psi_X \Big|_{X=X_i, Y=Y_i}}{\Omega} - \beta. \quad (7.31)$$

La misma solución se obtendría para V_i al considerarse idéntico el comportamiento a flexión en dirección X e Y. Por tanto,

$$\mathbf{L}_i \Big|_{Z=0} = \frac{C\Omega}{g(\Omega l)} \boldsymbol{\psi} \Big|_{X=X_i, Y=Y_i} \quad (7.32)$$

con

$$g(\Omega l) = \frac{1 + \cos(\Omega l) \cosh(\Omega l)}{\sin(\Omega l) \cosh(\Omega l) - \cos(\Omega l) \sinh(\Omega l)}. \quad (7.33)$$

Sustituyendo las expresiones (7.16), (7.22), (7.24) y (7.32) en (7.17) se obtiene finalmente la ecuación espacial de gobierno para vibraciones libres

$$\begin{aligned} D\Delta\Delta W - \rho\omega^2 W &= \sum_{i=1} \left(\rho_* l \omega^2 W \delta(X - X_i) \delta(Y - Y_i) \right. \\ &\quad \left. - \frac{C\Omega}{g(\Omega l)} \nabla \cdot [(\nabla W) \Big|_{X=X_i, Y=Y_i} \delta(X - X_i) \delta(Y - Y_i)] \right). \end{aligned} \quad (7.34)$$

Apéndice C: Matrices de masa y de rigidez del elemento MZC

A continuación se presenta el procedimiento para la obtención de las matrices de masa y de rigidez de un elemento rectangular de cuatro nodos y de tamaño $2a \times 2b$ y espesor t . Este elemento fue desarrollado por Melosh, Zienkiewicz y Cheung [54] para placas de Kirchhoff, y se ha empleado en la sección 3.3 de esta tesis para modelar la placa de la celda unitaria correspondiente a la configuración cuadrada.

En la figura 7.2 se ha identificado cada nodo i mediante los valores ξ_i y η_i correspondientes a las coordenadas naturales $\xi = x/a$ y $\eta = y/b$.

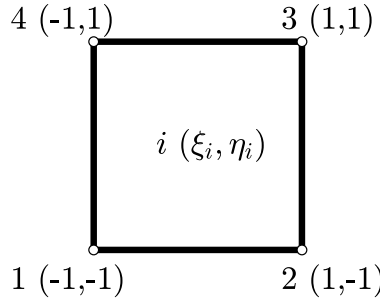


Figura 7.2: Elemento MZC con identificación de nodos.

Los elementos $i, j = 1, \dots, 4$ de la matriz de masa

$$\mathbf{M}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11}^{(e)} & \mathbf{M}_{12}^{(e)} & \mathbf{M}_{13}^{(e)} & \mathbf{M}_{14}^{(e)} \\ \mathbf{M}_{21}^{(e)} & \mathbf{M}_{22}^{(e)} & \mathbf{M}_{23}^{(e)} & \mathbf{M}_{24}^{(e)} \\ \mathbf{M}_{31}^{(e)} & \mathbf{M}_{32}^{(e)} & \mathbf{M}_{33}^{(e)} & \mathbf{M}_{34}^{(e)} \\ \mathbf{M}_{41}^{(e)} & \mathbf{M}_{42}^{(e)} & \mathbf{M}_{43}^{(e)} & \mathbf{M}_{44}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (7.35)$$

se calculan como

$$\mathbf{M}_{ij}^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} \rho_* \mathbf{N}_i \mathbf{N}_j^T dx dy, \quad (7.36)$$

donde ρ_* la densidad superficial y \mathbf{N}_i las funciones de forma

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_i^T &= [\mathbf{N}_i, \bar{\mathbf{N}}_i, \bar{\bar{\mathbf{N}}}_i] \\ \mathbf{N}_i &= (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(2 + \xi_i \xi + \eta_i \eta - \xi^2 - \eta^2)/8, \\ \bar{\mathbf{N}}_i &= a(\xi^2 - 1)(\xi + \xi_i)(1 + \eta_i \eta)/8, \\ \bar{\bar{\mathbf{N}}}_i &= b(\eta^2 - 1)(\eta + \eta_i)(1 + \xi_i \xi)/8.\end{aligned}\tag{7.37}$$

Los elementos $i, j = 1, \dots, 4$ de la matriz de rigidez

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(e)} & \mathbf{K}_{12}^{(e)} & \mathbf{K}_{13}^{(e)} & \mathbf{K}_{14}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{21}^{(e)} & \mathbf{K}_{22}^{(e)} & \mathbf{K}_{23}^{(e)} & \mathbf{K}_{24}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{31}^{(e)} & \mathbf{K}_{32}^{(e)} & \mathbf{K}_{33}^{(e)} & \mathbf{K}_{34}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{41}^{(e)} & \mathbf{K}_{42}^{(e)} & \mathbf{K}_{43}^{(e)} & \mathbf{K}_{44}^{(e)} \end{bmatrix}, \tag{7.38}$$

se calculan como

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} \mathbf{B}_{b_i}^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_{b_j} \, dxdy, \tag{7.39}$$

donde

$$\mathbf{B}_{b_i} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}_i}{\partial \xi^2} & \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{N}}_i}{\partial \xi^2} & \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \bar{\bar{\mathbf{N}}}_i}{\partial \xi^2} \\ \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}_i}{\partial \eta^2} & \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{N}}_i}{\partial \eta^2} & \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \bar{\bar{\mathbf{N}}}_i}{\partial \eta^2} \\ \frac{2}{ab} \frac{\partial^2 \mathbf{N}_i}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{2}{ab} \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{N}}_i}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{2}{ab} \frac{\partial^2 \bar{\bar{\mathbf{N}}}_i}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_b = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix}, \tag{7.40}$$

E el módulo de Young y ν el coeficiente de Poisson.

Apéndice D: Matrices de masa y rigidez del elemento CKZ

A continuación se presenta el procedimiento para la obtención de las matrices de masa y de rigidez de un elemento triangular de 3 nodos de espesor t . Este elemento fue desarrollado por Cheung, King y Zienkiewicz [54] para placas de Kirchhoff y ha sido empleado en la sección 3.3 para modelar la placa de la celda unitaria correspondiente a las configuraciones triangular y hexagonal.

Se utilizan las coordenadas naturales L_k definidas como

$$L_k = \frac{A_k}{A_1 + A_2 + A_3} \quad (7.41)$$

donde A_k con $k = 1, 2, 3$ es cada una de las áreas representadas en la figura 7.3 para una coordenada (x, y) .

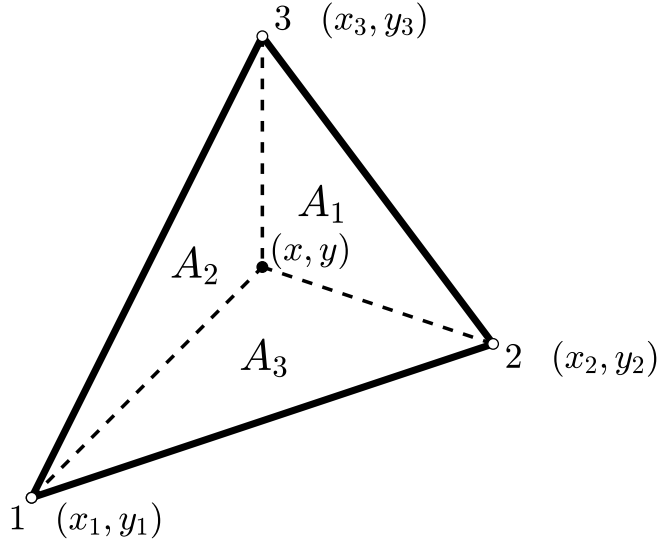


Figura 7.3: Elemento CKZ con identificación de nodos.

Los elementos $i, j = 1, \dots, 3$ de la matriz de masa

$$\mathbf{M}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11}^{(e)} & \mathbf{M}_{12}^{(e)} & \mathbf{M}_{13}^{(e)} \\ \mathbf{M}_{21}^{(e)} & \mathbf{M}_{22}^{(e)} & \mathbf{M}_{23}^{(e)} \\ \mathbf{M}_{31}^{(e)} & \mathbf{M}_{32}^{(e)} & \mathbf{M}_{33}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad (7.42)$$

se calculan como

$$\mathbf{M}_{ij}^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} \rho_* \mathbf{N}_i \mathbf{N}_j^T dx dy, \quad (7.43)$$

donde ρ_* es la densidad superficial y \mathbf{N}_i las funciones de forma

$$\mathbf{N}_i^T = [\mathbf{N}_i, \bar{\mathbf{N}}_i, \bar{\bar{\mathbf{N}}}_i] \quad (7.44)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1 &= \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_1^2 \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_1^2 \mathbf{L}_3 - \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2^2 - \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_3^2, \\ \bar{\mathbf{N}}_1 &= c_3(\mathbf{L}_1^2 \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}) - c_2(\mathbf{L}_3 \mathbf{L}_1^2 + \mathbf{L}), \\ \bar{\bar{\mathbf{N}}}_1 &= b_3(\mathbf{L}_1^2 \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}) - b_2(\mathbf{L}_3 \mathbf{L}_1^2 + \mathbf{L}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_2 &= \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_2^2 \mathbf{L}_3 + \mathbf{L}_2^2 \mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_3^2 - \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_1^2, \\ \bar{\mathbf{N}}_2 &= c_1(\mathbf{L}_2^2 \mathbf{L}_3 + \mathbf{L}) - c_3(\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2^2 + \mathbf{L}), \\ \bar{\bar{\mathbf{N}}}_2 &= b_1(\mathbf{L}_2^2 \mathbf{L}_3 + \mathbf{L}) - b_3(\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2^2 + \mathbf{L}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_3 &= \mathbf{L}_3 + \mathbf{L}_3^2 \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_3^2 \mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_3 \mathbf{L}_1^2 - \mathbf{L}_3 \mathbf{L}_2^2, \\ \bar{\mathbf{N}}_3 &= c_2(\mathbf{L}_3^2 \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}) - c_1(\mathbf{L}_2 \mathbf{L}_3^2 + \mathbf{L}), \\ \bar{\bar{\mathbf{N}}}_3 &= b_2(\mathbf{L}_3^2 \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}) - b_1(\mathbf{L}_2 \mathbf{L}_3^2 + \mathbf{L}), \end{aligned}$$

con

$$c_l = x_n - x_m \quad b_l = y_m - y_n. \quad (7.45)$$

Los elementos $i, j = 1, \dots, 3$ de la matriz de rigidez

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(e)} & \mathbf{K}_{12}^{(e)} & \mathbf{K}_{13}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{21}^{(e)} & \mathbf{K}_{22}^{(e)} & \mathbf{K}_{23}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{31}^{(e)} & \mathbf{K}_{32}^{(e)} & \mathbf{K}_{33}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad (7.46)$$

se calculan como

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} \mathbf{B}_{b_i}^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_{b_j} dx dy, \quad (7.47)$$

donde

$$\mathbf{B}_{b_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{N}_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{N}}_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \bar{\bar{\mathbf{N}}}_i}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{N}_i}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{N}}_i}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \bar{\bar{\mathbf{N}}}_i}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \mathbf{N}_i}{\partial xy} & 2 \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{N}}_i}{\partial xy} & 2 \frac{\partial^2 \bar{\bar{\mathbf{N}}}_i}{\partial xy} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_b = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad (7.48)$$

E el módulo de Young y ν el coeficiente de Poisson.

Apéndice E: Solución de la ecuación de Duffing mediante el método perturbativo de Múltiples Escalas

Se considera la ecuación de Duffing no forzada y sin amortiguamiento, que se corresponde con la ecuación (5.92) del presente documento

$$\ddot{q} + \alpha q + \varepsilon \frac{\alpha \Omega^2}{4} q^3 = 0 \quad (7.49)$$

con condiciones iniciales $q(0) = Q_0$, $\dot{q}(0) = 0$. Se supone una solución aproximada de la forma

$$q = q_0 + \varepsilon q_1 + O(\varepsilon^2). \quad (7.50)$$

La variable temporal τ se desarrolla como $\tau_0 = \tau$, $\tau_1 = \varepsilon \tau$, $\tau_2 = \varepsilon^2 \tau$, obteniéndose las siguientes expresiones

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau_1} + O(\varepsilon^2), \quad (7.51)$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = \frac{\partial^2}{\partial \tau_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \tau_0 \partial \tau_1} + \varepsilon^2 \left(2 \frac{\partial^2}{\partial \tau_0 \partial \tau_2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau_1^2} \right) + O(\varepsilon^3). \quad (7.52)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (7.49) se obtiene

$$\frac{\partial^2 q_0}{\partial \tau_0^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 q_1}{\partial \tau_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 q_0}{\partial \tau_0 \partial \tau_1} + \alpha(q_0 + \varepsilon q_1) + \varepsilon \frac{\alpha \Omega^2}{4} q_0^3 + O(\varepsilon^2) = 0. \quad (7.53)$$

Agrupando los términos de orden ε^0 presentes en la ecuación (7.53) se obtiene

$$\frac{\partial^2 q_0}{\partial \tau_0^2} + \alpha q_0 = 0, \quad (7.54)$$

donde una posible solución es

$$q_0 = a(\tau_1) \cos(\sqrt{\alpha} \tau_0 + b(\tau_1)) \quad (7.55)$$

con a , b como parámetros independientes de τ_0 . Agrupando términos de orden ε^1

$$\frac{\partial^2 q_1}{\partial \tau_0^2} + \alpha q_1 = -2 \frac{\partial^2 q_0}{\partial \tau_0 \partial \tau_1} - \alpha \frac{\Omega_1^2}{4} q_0^3 \quad (7.56)$$

y sustituyendo la ecuación (7.55) en (7.56) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 q_1}{\partial \tau_0^2} + \alpha q_1 &= 2\sqrt{\alpha} \frac{\partial a}{\partial \tau_1} \sin(\sqrt{\alpha}\tau_0 + b) + \\ &\left(2a\sqrt{\alpha} \frac{\partial b}{\partial \tau_1} - \frac{3}{16}\Omega^2 a^3 \alpha\right) \cos(\sqrt{\alpha}\tau_0 + b) - \frac{a^3}{16}\Omega^2 \alpha \cos(3\sqrt{\alpha}\tau_0 + 3b). \end{aligned} \quad (7.57)$$

Los términos cuyo argumento es $\sqrt{\alpha}\tau_0 + b$ son seculares y deben ser eliminados de la ecuación anterior. Por tanto, haciendo

$$2\sqrt{\alpha} \frac{\partial a}{\partial \tau_1} = 0, \quad (7.58)$$

$$2a\sqrt{\alpha} \frac{\partial b}{\partial \tau_1} - \frac{3}{16}\Omega^2 a^3 \alpha = 0, \quad (7.59)$$

en la ecuación (7.57) se obtiene

$$\frac{\partial^2 q_1}{\partial \tau_0^2} + \alpha q_1 = -\frac{a^3}{16}\Omega^2 \alpha \cos(3\sqrt{\alpha}\tau_0 + 3b), \quad (7.60)$$

cuya solución particular es

$$q_{1p} = \frac{a^3}{128}\Omega^2 \cos(3\sqrt{\alpha}\tau_0 + 3b). \quad (7.61)$$

A partir de las ecuaciones (7.59) se impone que

$$a = a(\tau_2, \tau_3) = \hat{a} + \frac{\partial a}{\partial \tau_2} \tau_2 \quad (7.62)$$

$$b = \frac{3}{32}\Omega^2 a^2 \sqrt{\alpha} \tau_1 + b_0(\tau_2, \tau_3) \quad (7.63)$$

con $b_0 = \hat{b}_0 + \frac{\partial b_0}{\partial \tau_2} \tau_2$.

Si se considera el desarrollo de las constantes a y b hasta $O(\tau_2)$, es decir,

$$a = \hat{a}, \quad b_0 = \hat{b}_0, \quad (7.64)$$

la solución de Múltiples Escalas de la ecuación de Duffing es

$$\begin{aligned} q &= \hat{a} \cos(\sqrt{\alpha}\tau_0 + \frac{3}{32}\Omega^2 \hat{a}^2 \sqrt{\alpha} \tau_1 + \hat{b}_0) + \\ &\varepsilon \frac{\hat{a}^3}{128}\Omega^2 \cos(3\sqrt{\alpha}\tau_0 + \frac{9}{32}\Omega^2 \hat{a}^2 \sqrt{\alpha} \tau_1 + 3\hat{b}_0) \end{aligned} \quad (7.65)$$

Reemplazando $\tau_0 = \tau$ y $\tau_1 = \varepsilon\tau$ en la expresión anterior se obtiene y asociando parámetros

$$q = \hat{a} \cos(\bar{\omega}\tau + \hat{b}_0) + \varepsilon \frac{\hat{a}^3}{128} \cos(3\bar{\omega}\tau + 3\hat{b}_0) \quad (7.66)$$

con

$$\bar{\omega} = \sqrt{\alpha}(1 + \varepsilon \frac{3}{32} \Omega^2 \hat{a}^2). \quad (7.67)$$

Para el caso de $q(0) = Q_0$, $\dot{q}(0) = 0$, las constantes \hat{a} y \hat{b}_0 se corresponden a

$$\hat{a} = Q_0, \quad \hat{b}_0 = 0, \quad (7.68)$$

obteniendo finalmente

$$q = \hat{a} \cos(\bar{\omega}\tau) + \varepsilon \frac{\hat{a}^3}{128} \cos(3\bar{\omega}\tau) \quad (7.69)$$

con

$$\bar{\omega} = \sqrt{\alpha}(1 + \varepsilon \frac{3}{32} \Omega^2 Q_0^2). \quad (7.70)$$

Bibliografía

Bibliografía

- [1] R. Zhu, X. Liu, S. C. Hu, G.K., G. Huang, Negative refraction of elastic waves at the deep-subwavelength scale in a single-phase metamaterial, *Nature Communications* 5 (2014) 5510.
- [2] M. H. Huang, S. Mao, H. Feick, H. Yan, Y. Wu, H. Kind, E. Weber, R. Russo, P. Yang, Room-temperature ultraviolet nanowire nanolasers, *science* 292 (5523) (2001) 1897–1899.
- [3] M. Lu, L. Feng, Y. Chen, Phononic crystals and acoustic metamaterials, *Materials Today* 12 (2009) 34–42.
- [4] D. Lee, D. Nguyen, J. Rho, Acoustic wave science realized by metamaterials, *Nano Convergence* 4 (2017) 1–15.
- [5] G. Ma, P. Sheng, Acoustic metamaterials: From local resonances to broad horizons, *Science Advances* 2.
- [6] M. Kushwaha, Band gap engineering in phononic crystals, *Recent Research Dev Applied Physics* 2 (2016) 743–855.
- [7] M. Born, T. Von Karman, Vibrations in space gratings (molecular frequencies), *Z. Phys* 13 (1912) 297–309.
- [8] L. Brillouin, *Wave propagation in periodic structures: electric filters and crystal lattices*, Courier Corporation, 2003.
- [9] S. Rytov, Acoustical properties of a thinly laminated medium, *Sov. Phys. Acoust* 2 (1) (1956) 68–80.
- [10] G. Hegemier, A. H. Nayfeh, A continuum theory for wave propagation in laminated composites—case 1: Propagation normal to the laminates, *Journal of Applied Mechanics* 40 (2) (1973) 503–510.

- [11] G. Hegemier, T. Bache, A continuum theory for wave propagation in laminated composites/case 2: Propagation parallel to the laminates, *Journal of Elasticity* 3 (2) (1973) 125–140.
- [12] E. Lee, A survey of variational methods for elastic wave propagation analysis in composites with periodic structures (1972).
- [13] M. S. Kushwaha, P. Halevi, L. Dobrzynski, B. Djafari-Rouhani, Acoustic band structure of periodic elastic composites, *Physical review letters* 71 (13) (1993) 2022.
- [14] M. S. Kushwaha, P. Halevi, G. Martinez, L. Dobrzynski, B. Djafari-Rouhani, Theory of acoustic band structure of periodic elastic composites, *Physical Review B* 49 (4) (1994) 2313.
- [15] J. Vasseur, B. Djafari-Rouhani, L. Dobrzynski, M. Kushwaha, P. Halevi, Complete acoustic band gaps in periodic fibre reinforced composite materials: the carbon/epoxy composite and some metallic systems, *Journal of Physics: Condensed Matter* 6 (42) (1994) 8759.
- [16] Z. Liu, X. Zhang, Y. Mao, Y. Zhu, Z. Yang, C. T. Chan, P. Sheng, Locally resonant sonic materials, *Science* 289 (5485) (2000) 1734–1736.
- [17] R. Martínez-Sala, Sound attenuation by sculpture, *Nature* 378 (1995) 241.
- [18] M. Oudich, Y. Li, B. Assouar, Z. Hou, A sonic band gap based on the locally resonant phononic plates with stubs, *New Journal of Physics* 12 (2010) 083049.
- [19] A. C. Eringen, Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves, *International Journal of Engineering Science* 10 (5) (1972) 425–435.
- [20] A. C. Eringen, *Nonlocal continuum field theories*, Springer Science & Business Media, 2002.
- [21] R. D. Mindlin, Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity, *International Journal of Solids and Structures* 1 (4) (1965) 417–438.

- [22] M. Lombardo, H. Askes, Higher-order gradient continuum modelling of periodic lattice materials, *Computational Materials Science* 52 (2012) 204–208.
- [23] D. Polyzos, D. I. Fotiadis, Derivation of mindlin’s first and second strain gradient elastic theory via simple lattice and continuum models, *International Journal of Solids and Structures* 49 (2012) 470–480.
- [24] R. D. Mindlin, Micro-structure in linear elasticity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 16 (1) (1964) 51–78.
- [25] I. Andrianov, J. Awrejcewicz, D. Weichert, Improved continuous models for discrete media, *Mathematical Problems in Engineering* 2010 (2010) Article ID986242.
- [26] P. Rosenau, Hamiltonian dynamics of dense chains and lattices: or how to correct the continuum, *Physics Letters A* 311 (1) (2003) 39–52.
- [27] K. Manktelow, M. Leamy, M. Ruzzene, Multiple scales analysis of wave-wave interactions in a cubically nonlinear monoatomic chain, *Nonlinear Dynamics* 63 (2011) 193–203.
- [28] J. Vila, J. Fernández-Sáez, R. Zaera, Nonlinear continuum models for the dynamic behavior of 1D microstructured solids, *International Journal of Solids and Structures* 117 (2017) 111–122.
- [29] J. Vila, J. Fernández-Sáez, R. Zaera, Reproducing the nonlinear dynamic behavior of a structured beam with a generalized continuum model, *Journal of Sound and Vibration* 420 (2018) 296–314.
- [30] V. Eremeyev, E. Ivanova, N. Morozov, A. Soloviev, Method of determining the eigenfrequencies of an ordered system of nanoobjects, *Technical Physics* 52 (1) (2007) 1–6.
- [31] V. Eremeyev, E. Ivanova, D. Indeitsev, Wave processes in nanostructures formed by nanotube arrays or nanosize crystals, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* 51 (4) (2010) 569–578.
- [32] Y. Pennec, B. Djafari-Rouhani, H. Larabi, J. Vasseur, A. Hladky-Hennion, Low-frequency gaps in a phononic crystal constituted of cylindrical dots deposited on a thin homogeneous plate, *Physical Review B* 78 (10) (2008) 104105.

- [33] W. Tsung-Tsong, H. Zi-Gui, T. Tzu-Chin, W. Tzung-Chen, Evidence of complete band gap and resonances in a plate with periodic stubbed surface, *Applied Physics Letters* 93 (11) (2008) 111902.
- [34] W. Tzung-Chen, W. Tsung-Tsong, H. Jin-Chen, Waveguiding and frequency selection of Lamb waves in a plate with a periodic stubbed surface, *Physical Review B* 79 (2009) 104306.
- [35] H. Zi-Gui, Analysis of frequency band gaps in a plate with periodic stubbed surface, in: *ASME 2010 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, American Society of Mechanical Engineers, Vancouver, Canada, 2010, pp. 409–412.
- [36] M. Collet, M. Ouisse, M. Ruzzene, M. Ichchou, Floquet–Bloch decomposition for the computation of dispersion of two-dimensional periodic, damped mechanical systems, *International Journal of Solids and Structures* 48 (20) (2011) 2837 – 2848.
- [37] Y. Achaoui, A. Khelif, S. Benchabane, L. Robert, V. Laude, Experimental observation of locally-resonant and bragg band gaps for surface guided waves in a phononic crystal of pillars, *Physical Review B* 83 (10) (2011) 104201.
- [38] A. Colombi, P. Roux, S. Guenneau, P. Gueguen, R. V. Craster, Forests as a natural seismic metamaterial: Rayleigh wave bandgaps induced by local resonances, *Scientific reports* 6 (2016) 19238.
- [39] S. S. Verbridge, J. M. Parpia, R. B. Reichenbach, L. M. Bellan, H. Craighead, High quality factor resonance at room temperature with nanostrings under high tensile stress, *Journal of Applied Physics* 99 (2006) 124304.
- [40] V. Leiman, M. Ryzhii, A. Satou, N. Ryabova, V. Ryzhii, T. Otsuji, M. Shur, Analysis of resonant detection of terahertz radiation in high-electron mobility transistor with a nanostring/carbon nanotube as the mechanically floating gate, *Journal of Applied Physics* 104 (2008) 024514.
- [41] Y. Qin, X. Wang, Z. L. Wang, Microfibre–nanowire hybrid structure for energy scavenging, *Nature* 451 (2008) 809.

- [42] A. Kudaibergenov, A. Nobili, L. Prikazchikova, On low-frequency vibrations of a composite string with contrast properties for energy scavenging fabric devices, *Journal of Mechanics of Materials and Structures* 11 (2016) 231–243.
- [43] G. Anand, Large-amplitude damped free vibration of a stretched string, *The Journal of the Acoustical Society of America* 45 (1969) 1089–1096.
- [44] A. H. Nayfeh, D. T. Mook, *Nonlinear oscillations*, John Wiley & Sons, 2008.
- [45] A. Leissa, A. Saad, Large amplitude vibrations of strings, *Journal of applied mechanics* 61 (1994) 296–301.
- [46] S. Gonella, M. Ruzzene, Analysis of in-plane wave propagation in hexagonal and re-entrant lattices, *Journal of Sound and Vibration* 312 (1) (2008) 125–139.
- [47] Z. Wu, K. Xie, H. Yang, P. Jiang, X. He, All-angle self-collimation in two-dimensional rhombic-lattice photonic crystals, *Journal of optics* 14 (1) (2011) 015002.
- [48] C. Kittel, P. McEuen, P. McEuen, *Introduction to Solid State Physics*, Vol. 8, Wiley New York, 1996.
- [49] F. Bloch, Über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern, *Zeitschrift für physik* 52 (7-8) (1929) 555–600.
- [50] A. S. Phani, J. Woodhouse, N. Fleck, Wave propagation in two-dimensional periodic lattices, *The Journal of the Acoustical Society of America* 119 (4) (2006) 1995–2005.
- [51] F. Farzbod, M. Leamy, The treatment of forces in Bloch analysis, *Journal of Sound and Vibration* 325 (3) (2009) 545 – 551.
- [52] R. Langley, A note on the force boundary conditions for two-dimensional periodic structures with corner freedoms, *Journal of Sound and Vibration* 167 (1993) 377–381.
- [53] M. I. Hussein, M. J. Leamy, M. Ruzzene, Dynamics of phononic materials and structures: Historical origins, recent progress, and future outlook, *Applied Mechanics Reviews* 66 (4) (2014) 040802.

- [54] E. Oñate, Structural analysis with the finite element method. Linear statics: volume 2: beams, plates and shells, Springer Science & Business Media, Barcelona, Spain, 2013.
- [55] R. K. Pal, M. Ruzzene, Edge waves in plates with resonators: an elastic analogue of the quantum valley hall effect, *New Journal of Physics* 19 (2) (2017) 025001.
- [56] A. Spadoni, M. Ruzzene, S. Gonella, F. Scarpa, Phononic properties of hexagonal chiral lattices, *Wave Motion* 46 (7) (2009) 435 – 450.
- [57] J. P. Wolfe, Imaging phonons: acoustic wave propagation in solids, Cambridge University Press, 2005.
- [58] C. Sugino, S. Leadenham, M. Ruzzene, A. Erturk, On the mechanism of bandgap formation in locally resonant finite elastic metamaterials, *Journal of Applied Physics* 120 (2016) 134501.
- [59] C. Sugino, Y. Xia, S. Leadenham, M. Ruzzene, A. Erturk, A general theory for bandgap estimation in locally resonant metastructures, *Journal of Sound and Vibration* 406 (2017) 104 – 123.
- [60] D. C. Lam, F. Yang, A. Chong, J. Wang, P. Tong, Experiments and theory in strain gradient elasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 51 (8) (2003) 1477–1508.
- [61] M. Kopycinska-Mueller, R. H. Geiss, J. Mueller, D. C. Hurley, Elastic-property measurements of ultrathin films using atomic force acoustic microscopy, *Nanotechnology* 16 (6) (2005) 703.
- [62] C. Chen, Y. Shi, Y. S. Zhang, J. Zhu, Y. Yan, Size dependence of young’s modulus in zno nanowires, *Physical review letters* 96 (7) (2006) 075505.
- [63] H. Askes, E. C. Aifantis, Gradient elasticity in statics and dynamics: an overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results, *International Journal of Solids and Structures* 48 (13) (2011) 1962–1990.
- [64] E. Kröner, Elasticity theory of materials with long range cohesive forces, *International Journal of Solids and Structures* 3 (5) (1967) 731–742.

- [65] J. Krumhansl, Some considerations of the relation between solid state physics and generalized continuum mechanics, in: *Mechanics of generalized continua*, Springer, 1968, pp. 298–311.
- [66] I. Kunin, The theory of elastic media with microstructure and the theory of dislocations, in: *Mechanics of generalized continua*, Springer, 1968, pp. 321–329.
- [67] A. C. Eringen, Nonlocal polar elastic continua, *International journal of engineering science* 10 (1) (1972) 1–16.
- [68] A. C. Eringen, D. Edelen, On nonlocal elasticity, *International Journal of Engineering Science* 10 (3) (1972) 233–248.
- [69] A. A. Pisano, P. Fuschi, Closed form solution for a nonlocal elastic bar in tension, *International Journal of Solids and Structures* 40 (1) (2003) 13–23.
- [70] X. Zhu, H. Dai, Solution for a nonlocal elastic bar in tension, *Science China Physics, Mechanics and Astronomy* 55 (6) (2012) 1059–1065.
- [71] Y. Wang, X. Zhu, H. Dai, Exact solutions for the static bending of euler-bernoulli beams using eringen’s two-phase local/nonlocal model, *AIP Advances* 6 (8) (2016) 085114.
- [72] X. Zhu, Y. Wang, H.-H. Dai, Buckling analysis of euler–bernoulli beams using eringen’s two-phase nonlocal model, *International Journal of Engineering Science* 116 (2017) 130–140.
- [73] J. Fernández-Sáez, R. Zaera, Vibrations of bernoulli-euler beams using the two-phase nonlocal elasticity theory, *International Journal of Engineering Science* 119 (2017) 232–248.
- [74] G. Romano, R. Barretta, M. Diaco, F. M. de Sciarra, Constitutive boundary conditions and paradoxes in nonlocal elastic nanobeams, *International Journal of Mechanical Sciences* 121 (2017) 151–156.
- [75] A. Polyanin, A. Manzhirov, *Handbook of Integral Equations*, CRC Press, New York, 2008.

- [76] J. Peddieson, G. R. Buchanan, R. P. McNitt, Application of nonlocal continuum models to nanotechnology, *International Journal of Engineering Science* 41 (3-5) (2003) 305–312.
- [77] M. Eltaher, M. Khater, S. A. Emam, A review on nonlocal elastic models for bending, buckling, vibrations, and wave propagation of nanoscale beams, *Applied Mathematical Modelling* 40 (5-6) (2016) 4109–4128.
- [78] H. Rafii-Tabar, E. Ghavanloo, S. A. Fazelzadeh, Nonlocal continuum-based modeling of mechanical characteristics of nanoscopic structures, *Physics Reports* 638 (2016) 1–97.
- [79] H.-T. Thai, T. P. Vo, T.-K. Nguyen, S.-E. Kim, A review of continuum mechanics models for size-dependent analysis of beams and plates, *Composite Structures* 177 (2017) 196–219.
- [80] E. Benvenuti, A. Simone, One-dimensional nonlocal and gradient elasticity: closed-form solution and size effect, *Mechanics Research Communications* 48 (2013) 46–51.
- [81] Q. Wang, K. Liew, Application of nonlocal continuum mechanics to static analysis of micro-and nano-structures, *Physics Letters A* 363 (3) (2007) 236–242.
- [82] N. Challamel, C. Wang, The small length scale effect for a non-local cantilever beam: a paradox solved, *Nanotechnology* 19 (34) (2008) 345703.
- [83] C. Wang, S. Kitipornchai, C. Lim, M. Eisenberger, Beam bending solutions based on nonlocal timoshenko beam theory, *Journal of Engineering Mechanics* 134 (6) (2008) 475–481.
- [84] N. Challamel, Z. Zhang, C. Wang, J. Reddy, Q. Wang, T. Michelitsch, B. Collet, On nonconservativeness of eringen’s nonlocal elasticity in beam mechanics: correction from a discrete-based approach, *Archive of Applied Mechanics* 84 (9-11) (2014) 1275–1292.
- [85] D.-P. Lu, D. A. Christopher, Immunolocalization of a protein disulfide isomerase to arabidopsis thaliana chloroplasts and its association with

- starch biogenesis, *International journal of plant sciences* 167 (1) (2006) 1–9.
- [86] N. Challamel, C. Wang, The small length scale effect for a non-local cantilever beam: a paradox solved, *Nanotechnology* 19 (34) (2008) 345703.
 - [87] J. Fernández-Sáez, R. Zaera, J. Loya, J. Reddy, Bending of euler-bernoulli beams using eringen’s integral formulation: a paradox resolved, *International Journal of Engineering Science* 99 (2016) 107–116.
 - [88] N. Fleck, J. Hutchinson, Strain gradient plasticity, *Advances in applied mechanics* 33 (1997) 296–361.
 - [89] S. Kong, S. Zhou, Z. Nie, K. Wang, Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory, *International Journal of Engineering Science* 47 (4) (2009) 487–498.
 - [90] B. Wang, J. Zhao, S. Zhou, A micro scale timoshenko beam model based on strain gradient elasticity theory, *European Journal of Mechanics-A/Solids* 29 (4) (2010) 591–599.
 - [91] B. Akgöz, Ö. Civalek, Strain gradient elasticity and modified couple stress models for buckling analysis of axially loaded micro-scaled beams, *International Journal of Engineering Science* 49 (11) (2011) 1268–1280.
 - [92] B. Akgöz, Ö. Civalek, A new trigonometric beam model for buckling of strain gradient microbeams, *International Journal of Mechanical Sciences* 81 (2014) 88–94.
 - [93] B. Akgöz, Ö. Civalek, Longitudinal vibration analysis for microbars based on strain gradient elasticity theory, *Journal of Vibration and Control* 20 (4) (2014) 606–616.
 - [94] U. Güven, Love bishop rod solution based on strain gradient elasticity theory, *Comptes Rendus Mecanique* 342 (1) (2014) 8–16.
 - [95] A. Morassi, J. Fernández-Sáez, R. Zaera, J. Loya, Resonator-based detection in nanorods, *Mechanical Systems and Signal Processing* 93 (2017) 645–660.

- [96] M. Dilella, M. F. Dell’Oste, J. Fernández-Sáez, A. Morassi, R. Zaera, Mass detection in nanobeams from bending resonant frequency shifts, *Mechanical Systems and Signal Processing* 116 (2019) 261–276.
- [97] B. Hall, *Lie groups, Lie algebras, and representations: an elementary introduction*, Vol. 222, Springer, 2015.
- [98] T. Doyle, J. L. Ericksen, Nonlinear elasticity, in: *Advances in applied mechanics*, Vol. 4, Elsevier, 1956, pp. 53–115.
- [99] R. Hill, Aspects of invariance in solid mechanics, in: *Advances in applied mechanics*, Vol. 18, Elsevier, 1979, pp. 1–75.
- [100] M. Lombardo, H. Askes, Elastic wave dispersion in microstructured membranes, in: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society, 2010.
- [101] E. Fermi, J. R. Pasta, S. M. Ulam, *Studies of nonlinear problems*.
- [102] J. N. Reddy, *Energy and variational methods in applied mechanics: with an introduction to the Finite Element Method*, Wiley New York, 1984.
- [103] S. A. Nayfeh, A. H. Nayfeh, D. T. Mook, Nonlinear response of a taut string to longitudinal and transverse end excitation, *Modal Analysis* 1 (1995) 307–334.
- [104] P. Rosenau, Dynamics of dense lattices, *Physical Review B* 36 (11) (1987) 5868.
- [105] K. Farahani, H. Bahai, Hyper-elastic constitutive equations of conjugate stresses and strain tensors for the seth–hill strain measures, *International Journal of Engineering Science* 42 (1) (2004) 29–41.
- [106] N. S. Martys, R. D. Mountain, Velocity verlet algorithm for dissipative-particle-dynamics-based models of suspensions, *Physical Review E* 59 (3) (1999) 3733.
- [107] C. Van Loan, *Computational frameworks for the Fast Fourier Transform*, Vol. 10, Siam, 1992.

- [108] G. Duffing, Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung, F. Vieweg & sohn, 1918.
- [109] M. Abramowitz, I. A. Stegun, Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables, Vol. 55, Courier Corporation, 1964.
- [110] A. H. Nayfeh, Introduction to perturbation techniques, John Wiley & Sons, 2011.